RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS E OUTRAS JANELAS QUE SE ABREM.

Paola Sztajn[1] *

RESUMO

Neste artigo, discuto a resolução de problemas em educação matemática e suas implicações para o ensino-aprendizagem desta ciência. O ensaio começa com um breve apanhado histórico dos "problemas" no ensino da matemática. Baseando-me em diversos autores e suas pesquisas, defino *problemas* como sendo questões que alguém deseja resolver mas não possui um algoritmo imediato para encontrar a solução e defendo que estes problemas servem para formar, enriquecer e reorganizar os conceitos matemáticos que possuímos. Mais ainda, durante o processo de resolução de problemas os alunos cometem erros, experimentam emoções e necessitam avaliar sua própria cognição. Assim sendo, como conseqüência do uso de problemas em sala de aula, enfoco neste trabalho a questão da análise de erros, dos problemas afetivos e da metacognição em educação matemática.

PALAVRAS CHAVES:

Educação Matemática, Resolução de Problemas, Conceitos.

ABSTRACT

In this article, I discuss problem solving in Mathematics education and the consequences of its use for mathematics teaching and learning. The manuscript begins with a brief historical review of problems in the teaching of mathematics. Drawing upon a few authors and their research, I define *problems* as occurrences that one wants to solve but for which solution one does not have an immediate algorithm. I claim that such problems are necessary for one to form, enrich and reorganize his/her mathematical concepts. Furthermore, during the problem solving process students make mistakes, experience emotions, and have to assess their own cognition. Therefore, I focus on error analysis, afecctive issues and metacognition in Mathematics education as a consequence of teaching via problem solving

KEYWORDS:

Mathematics, Problem Solving, Concepts.

* Departamento de Educação, PUC-Rio

1. A autora gostaria de agradecer a Maria Apparecida Mamede-Neves e Gilda Palis por seus comentários a uma versão inicial deste texto.

O carro chefe do ensino da Matemática nas últimas décadas tem sido a "Resolução de Problemas". Livros didáticos atualizados, encontros de educadores matemáticos, cursos de formação e atualização de professores, a primeira versão dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental da Matemática etc., todos falam que os alunos precisam aprender a resolver problemas de matemática e aprender matemática resolvendo problemas. Além disso, em educação matemática, esta é a área na qual mais pesquisas foram realizadas nos últimos anos. Por que tamanha importância é dada a esse assunto?

Antes de discutir a questão acima, inicio este texto com uma outra pergunta que me parece apontar na direção da resposta procurada: por que devemos resolver problemas em matemática? Polya, o "pai" do método heurístico para resolução de problemas, dizia que seu objetivo ao ensinar Matemática através de problemas era fazer com que as crianças usassem a cabeça (Polya, citado em Lester, 1985). Já Lester (1985) coloca que a resolução de problemas na sala de aula de Matemática é importante por favorecer o desenvolvimento da capacidade dos alunos pensarem por si mesmos. Dante (1989) lista alguns outros motivos pelos quais deve-se resolver problemas em matemática: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática, tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e dar uma boa base matemática às pessoas.

A ligação entre matemática, resolução de problemas e pensamento, que aparece em todas as respostas mencionadas, não é recente. Olhando a história, "problemas" existem no currículo de Matemática desde a antigüidade. Em seus sistemas educacionais, egípcios, chineses e gregos já passavam problemas para seus alunos (Stanic & Kilpatrick, 1989). Platão, por exemplo, acreditava que a resolução de questões matemáticas melhorava a habilidade de uma pessoa pensar e raciocinar. Mais recentemente, no século XIX, a disciplina mental e a teoria das faculdades mentais sustentavam que o estudo da matemática era um excelente caminho para o desenvolvimento da razão. Nessa época, os problemas matemáticos eram valorizados porque eles serviam para "exercitar a mente".

No início do século XX, as teorias de caráter behaviorista contestaram a idéia de que os problemas matemáticos pudessem melhorar a capacidade das pessoas pensarem. Entre os pesquisadores da época, Thorndike, por exemplo, dizia que havia tantas diferenças entre os indivíduos que não era possível assumir, de forma geral, que a matemática pudesse aprimorar o pensamento de todos. Watson, nessa mesma época, propunha que se eliminassem os processos não-observáveis das teorias psicológicas. Para ele, a mente devia ser tratada como uma caixa preta e o comportamento humano como o objeto primordial das pesquisas. Sendo assim, para Watson, a ligação entre pensamento e resolução de problemas sequer deveria ser considerada como um objeto de estudo relevante. Conseqüentemente, ao longo da primeira metade deste século a resolução de problemas perdeu espaço no currículo de Matemática.

Apesar do crescimento do behaviorismo, também havia, no início do século, pesquisadores que se opunham aos princípios das teorias comportamentais, como, por exemplo, os estudiosos da *gestalt*. Entre eles, Wertheimer estudava os processos mentais e discutia a resolução de problemas matemáticos. Também neste século, os trabalhos de Piaget defenderam a proposta de que o pensamento humano tem uma estruturação básica lógico-matemática, valorizando os problemas matemáticos na compreensão da organização do pensamento humano.

Passada a Segunda Guerra Mundial, outros trabalhos, que retomavam a investigação acerca do funcionamento da mente, ganharam força. O número de pesquisas sobre a cognição humana cresceu, principalmente aquelas que usavam como analogia os computadores. Segundo Anderson (1980), a psicologia cognitiva representa, desde então, o esforço dos pesquisadores que querem entender os mecanismos básicos do pensamento humano.

Com esse "renascimento" do interesse pelo funcionamento da mente, o estudo da resolução de problemas ganhou novo ímpeto, gerando uma onda de discussões e pesquisas que, ainda hoje, está presente na educação matemática. Dentro da ciência da cognição, um dos primeiros trabalhos foi o ***Human Problem Solving*** (Newell & Simon, 1972) que procurava entender como a mente trabalha na resolução de problemas do tipo Torre de Hanói, jogo de xadrez e alguns quebra-cabeças. Ainda nessa área, estudos sobre o processamento da informação buscavam explicações para as atividades intelectuais humanas examinando a estruturação do conhecimento dentro da mente e os mecanismos através dos quais esse conhecimento é manipulado, transformado e gerado, no processo de resolução dos diversos problemas que enfrentamos em situações de cunho prático ou intelectual.

Com certeza, o entendimento do processo de resolução de problemas e do pensamento humano avançou bastante nas últimas três décadas. Das teorias iniciais em ciência da cognição e processamento de informações até o que hoje acredita-se ser o pensamento humano, muitas idéias foram transformadas e reavaliadas. Entretanto, desde então há grande interesse pelo funcionamento da mente humana e, em especial, pela forma segundo a qual a mente trabalha ao deparar-se com questões complexas que exigem raciocínios sofisticados.

No presente trabalho, enfoco a resolução de problemas e a justificativa de sua presença no currículo de Matemática, através da contribuição que os problemas dão para a construção e organização do pensamento lógico-matemático. A partir de uma perspectiva cognitivista, entendo que problemas servem para formar, enriquecer e reorganizar os conceitos matemáticos que possuímos. Se entendemos o conhecimento como um sistema de representações, problemas ajudam na construção de conceitos e no aprimoramento do saber matemático. É preciso resolver problemas em Matemática não apenas para que o aluno "use a cabeça" ou "pense por si só". Na base da discussão sobre resolução de problemas em Matemática, deve estar a idéia de que os alunos precisam resolver problemas para, através deles, constituírem seus conceitos matemáticos.

Assim, na primeira parte deste texto discuto a ligação entre resolução de problemas e a construção dos conceitos matemáticos. Uma conseqüência da noção de conceitos, aqui apresentada, como algo em constante transformação, é a necessidade de que os professores conheçam seus alunos, no sentido de saberem como eles estão pensando, a fim de ajudá-los na formação de seus conceitos. Para procurar entender como os alunos organizam internamente suas idéias, é preciso analisar os erros que cometem. Portanto, na segunda parte deste ensaio discuto a ligação entre resolução de problemas e a análise de erros em educação matemática.

Dado que os problemas aqui considerados, por definição do que entendemos como um **problema**, não permitem aos alunos resolução imediata, erros sempre são cometidos no caminho para a solução correta, fazendo com que muitos alunos experimentem certa frustração. Portanto, a terceira parte deste trabalho trata do fator afetivo na resolução de problemas matemáticos. Como veremos, as reações de ordem afetiva são da maior importância para os educadores que querem trabalhar com a resolução de problemas em Matemática. Nem só os conceitos que possuímos, os erros que fazemos ou as emoções que sentimos podem explicar nosso desempenho na resolução de um problema. Assim, a quarta seção deste ensaio trata da questão da metacognição e da regulação das atividades cognitivas por parte do sujeito pensante. Finalmente, concluo o trabalho retornando à questão inicial colocada acima: por que tanta importância é dada à resolução de problemas em educação matemática?

PROBLEMAS E A FORMAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS.

O termo **problema**, no ensino da Matemática, representa um "problema" em si! Esse termo é usado de formas distintas por pessoas diferentes e representa diversas situações. Por exemplo, tanto chamamos de problemas as atividades de fixação apresentadas no final de cada capítulo do livro didático de Matemática, quanto usamos a mesma palavra para nos referirmos aos desafios que às vezes colocamos para os alunos.

Podemos falar em problema processo, padrão, de aplicação e de quebra-cabeça, entre outros (ver, por exemplo, a classificação feita por Dante, 1989).

Considerando o papel dos problemas na formação dos conceitos matemáticos, Vergnaud (1995) distingue apenas dois tipos de situação.No primeiro, ao deparar-se com um problema o sujeito possui as competências necessárias para resolvê-lo de forma relativamente imediata.Nesse caso, para uma série de situações semelhantes a pessoa tem um conjunto de ações automatizadas que pode executar a fim de obter uma resposta.O conjunto dessas ações forma um esquema (organização invariante do comportamento) que serve para resolver toda uma classe de situações. Para cada classe distinta de situações, a pessoa possui um esquema de ação diferente.

No segundo tipo de situação, o sujeito depara-se com uma questão que ele não sabe, de imediato, como solucionar; isto é, ele não dispõe previamente de todas as competências necessárias para resolver o novo problema que se lhe apresenta. Nesse caso, a pessoa é obrigada a refletir, explorar a situação, hesitar, fazer tentativas frustradas, fazer opções corretas até, eventualmente, ser bem sucedida ou desistir. O sujeito, em seu processo de busca de solução, utiliza-se de vários dos esquemas que conhece. Esses esquemas, entretanto, têm que ser acomodados, descombinados e recombinados, levando assim a novas descobertas.

Esse tipo de situação é fundamental para a construção do conhecimento matemático, tanto no sentido do acréscimo de novas idéias como no de averiguação e correção das idéias previamente existentes. Particularmente, são situações desse tipo que chamaremos de **problema** neste trabalho, tomando o termo como indicando questões que alguém deseja resolver mas não possui um algoritmo imediato para encontrar a solução (baseando-nos nos trabalhos de Frank Lester). O desejo de resolver é importante nessa definição, pois, se não queremos resolver uma situação nova com a qual nos deparamos, não estamos perante um problema. Além disso, se já sabemos o que é preciso fazer, também não temos um problema.

A definição de **problema** colocada acima tem importantes implicações para a sala de aula. Primeiro, ela indica que, quando os alunos não estão interessados e motivados, eles não vêem um problema nas questões que propomos. Segundo, uma pergunta pode ser um verdadeiro problema para alguns alunos e não o ser para outros — dependendo do conhecimento matemático de cada um. Assim sendo, mesmo exercícios que pensamos serem de fixação podem constituir-se em verdadeiros problemas para certos alunos que não dominam os conceitos com os quais o problema lida. Por outro lado, às vezes o professor pode crer estar propondo um problema à turma e descobrir que alguns alunos sabem resolvê-lo automaticamente.

De uma forma geral, Vergnaud (1995) afirma que o funcionamento cognitivo perante uma situação nova baseia-se no repertório inicial de esquemas disponíveis. Entretanto, é lidando com problemas que a pessoa descobre, em situação, novos aspectos de seus esquemas ou até desenvolve novos esquemas. Por exemplo, uma pessoa pode notar que está aplicando um esquema de forma restrita, usando-o apenas para uma classe de situações mais reduzida do que aquela na qual ele é eficaz. Através de um problema a pessoa pode perceber que é possível estender seu esquema a uma classe mais ampla. Esse processo é possível quando o sujeito percebe analogias, parentescos e, principalmente, invariantes entre a classe de situações onde seu esquema é operatório e as novas situações que ele quer vencer.

Também há o caso contrário, no qual um determinado esquema está sendo usado, de forma imperfeita, em um domínio mais amplo do que aquele para o qual ele serve. Nesse caso, ao deparar-se com uma situação-problema o sujeito pode notar que é preciso rever seu esquema, restringindo-lhe o alcance.

Para a educação matemática, Vergnaud (1982) sugere ser prioritário colecionar, analisar e classificar, de forma tão exaustiva quanto possível, as situações-problema que fazem um certo conceito ser funcional e ter significado. Pensando, mais uma vez, em termos de implicações para a sala de aula, os professores precisam usar a maior variedade de situações-problema possível, ao trabalharem um conceito, para que os alunos possam enfrentar relações e questões que são distintas daquelas que já dominam.

Uma classificação do tipo sugerido por Vergnaud existe, por exemplo, para as situações que envolvem adição/subtração. Fusson (1992) lista oito tipos diferentes de situações-problema para o campo aditivo: adicionar a diferença e retirar a diferença (subdivididos em: falta o começo, falta o final ou falta a diferença), combinar fisicamente e combinar conceitualmente (subdivididos em: falta uma parte ou falta o todo) e, ainda, igualar adicionando, igualar retirando, comparar quantos a mais e comparar quantos a menos (que podem ser divididos em: diferença desconhecida, sentença indica a resposta ou sentença indica oposto da resposta). (Ver QUADRO 1, página seguinte).

Todos esses tipos de situações propostas ocorrem na vida das crianças e, para elas, são todos muito diferentes — mesmo que a operação matemática usada para respondê-las seja a mesma. Em sala de aula, entretanto, observa-se que, na maior parte dos casos, quando se fala em adição e subtração, a discussão restringe-se à idéia de adicionar e retirar a diferença. Vale ressaltar aqui que não devemos ensinar aos alunos uma nova tipologia de problemas apresentando-lhes o Quadro 1 como uma tabela a ser decorada. O que se coloca é que a criança deve ter a oportunidade de lidar com as diversas situações que constituem o campo aditivo, na construção dos conceitos de adição e subtração, e é obrigação do professor trazer todas essas situações para a sala de aula.

A fim de ensinar Matemática, os professores devem dispor de uma grande variedade de problemas, para que os alunos possam enfrentar várias situações que, em verdade, constituem um mesmo conceito matemático. Os modelos e as teorias que os alunos constroem são moldados pelas questões com as quais eles se deparam. Por isso, os professores devem conhecer as formas iniciais e ingênuas que as concepções dos alunos podem tomar, bem como os erros que eles fazem em conseqüência das visões ainda pouco desenvolvidas que possuem. Além disso, os professores precisam saber como é possível modificar tais concepções, tornando-as cada vez mais sofisticadas, através da apresentação de novas situações-problema. O mais importante, entretanto, é que os professores saibam que não basta ensinar definições, pois as concepções dos alunos só se modificam quando eles enfrentam o conflito de um problema que não podem resolver a partir dos esquemas que possuem. A resolução de problemas é, portanto, "a fonte do conhecimento operacional de um aluno". (Vergnaud, 1982).

Todas as situações-problema que um aluno encontra dão sentido aos conceitos matemáticos que ele possue. Entretanto, um conceito matemático não é constituído por essas situações. Um conceito tão pouco é formado apenas por definições. Segundo Vergnaud (1988), o estudo do desenvolvimento dos conceitos matemáticos requer uma visão de conceito como uma tripla C=(S, I, &) onde,

- **S** é um conjunto de situações que dão sentido a um conceito;
- **I** é um conjunto de invariantes que constituem um conceito e que podem ser reconhecidos e usados por um sujeito na análise e domínio de uma situação;
- **&** é um conjunto de representações simbólicas usadas para representar o conceito, suas propriedades e as situações às quais ele se refere.

Em outras palavras, ***S*** é a realidade que a pessoa encontra (referência) e (***I*, &**) formam a representação da situação, onde interagem o significado (***I***) e o significante (**&**).

É preciso considerar que cada um dos conceitos matemáticos não se desenvolve isoladamente. Ao contrário, conceitos desenvolvem-se em relação a outros conceitos, através de vários problemas, enunciados e símbolos. Podemos dizer que um conceito não se refere apenas a um tipo de situação e, por outro lado, uma situação não pode ser analisada com apenas um conceito. Conseqüentemente, ainda conforme Vergnaud

QUADRO 1

SITUAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO.

SITUAÇÕES ADITIVAS	**SITUAÇÕES DE SUBTRAÇÃO**	
Adicionar a diferença	**Retirar a diferença**	
Falta o final Peter tinha 3 maçãs. Ana deu mais 5 maçãs para ele. Quantas maçãs ele tem agora? Falta a diferença Kátia tinha 5 lápis. Quantos lápis ela precisa comprar para ficar com 7 no total? Falta o começo Roberto ganhou 2 biscoitos. Agora ele tem 5 biscoitos. Quantos biscoitos ele tinha no começo?	Falta o final Jonas tinha 8 pipas. Ele deu 5 para o Guga. Quantas pipas o Jonas tem agora? Falta a diferença Fred tinha 11 balas e perdeu algumas. Agora ele tem 4 balas. Quantas balas Fred perdeu? Falta o começo Karen tinha algumas moedas. Ela perdeu 12 e ainda tem 7. Quantos moedas ela tinha no começo?	
Combinar fisicamente	**Comparar (Igualar)**	
	Adicionar	**Retirar**
Falta o todo Sara tem 6 pães doces e nove pães franceses. Ela arruma todos eles em uma travessa. Quantos pães há na travessa? Falta uma parte José e Tom têm 8 figurinhas quando eles juntam todas as figurinhas que eles têm. Se José tem 3 figurinhas, quantas figurinhas Tom tem?	Diferença desconhecida Suzana tem 8 flores e Ana tem 5. Quantas flores Ana precisa ganhar para ter tantas flores quanto Suzana? Sentença indica solução O time de futebol tinha 6 meninos. Mais 2 entraram no time. Agora o time tem igual número de meninos e meninas. Quantas meninas tem no time? Sentença indica oposto da solução Joana tem 13 balas. Se Dudu ganhar mais 5 balas, ele fica com o mesmo número que Joana. Quantas balas Dudu tem?	Diferença desconhecida Jane tem 7 bonecas. Eva tem 3. Quantas bonecas a Jane tem que dar para ficar com o mesmo número que Eva? Sentença indica solução Havia 11 copos na mesa. Retirei 4 para que ficasse o mesmo número de copos e pratos. Quantos pratos havia na mesa? Sentença indica oposto da solução As meninas estavam dançando. 4 resolveram sentar-se para que cada garoto ficasse com uma parceira. Se há 7 garotos,qual o total de garotas ?
Combinar conceitualmente	**Comparar**	
	Quantos mais	**Quantos menos**
Falta o todo A equipe de basquete tem 6 garotos e 8 garotas. Quantas crianças tem na equipe? Falta uma parte Bruno tem 14 flores. Oito são vermelhas e as outras são amarelas. Quantas flores amarelas Bruno tem?	Diferença desconhecida Jô tem 3 balões. Sua irmã Ana tem 5 balões. Quantos balões Ana tem a mais que Jô? Sentença indica solução Luís tem 6 peixinhos dourados. Carla tem 2 peixinhos a mais que Luís. Quantos peixinhos Carla tem? Sentença indica oposto da solução Maria tem 9 barras de chocolate. Ela tem 5 barras a mais que Lilian. Quantas barras Lilian tem?	Diferença desconhecida Lucas tem 8 chicletes. Milton tem 2. Milton tem quantos chicletes a menos que Lucas? Sentença indica solução O padeiro leva 11 pães todos os dias. Na segunda feira ele levou 4 a menos. Quantos pães ele levou na segunda? Sentença indica oposto da solução Igor tem 5 brinquedos. Ele tem 8 a menos que Leila. Quantos brinquedos a Leila tem?

Retirado e adaptado de Fusson, 1992, p.246

(1984), devemos estudar campos conceituais, isto é, o conjunto de todas as situações que, para serem dominadas, necessitam de uma variedade de conceitos, representações simbólicas e procedimentos interligados. Nesse sentido, falamos em campo aditivo e em campo multiplicativo, por exemplo, quando queremos estudar as quatro operações básicas. Somente através do estudo de campos conceituais é que podemos pretender entender as conexões e os saltos existentes na aquisição do conhecimento pelos alunos.

Pelas idéias que coloquei até agora, vê-se que os conceitos matemáticos estão em constante transformação e que a formação de um campo conceitual dá-se no decorrer de um longo período de tempo. Mais radicalmente, pode-se pensar que nossos conceitos estão sempre em formação e modificam-se e aprimoram-se cada vez que precisamos utilizá-los em uma nova situação. Assim sendo, a formação dos conceitos matemáticos não pode ser entendida de forma estática. Ao contrário, um conceito é algo dinâmico. Como conseqüência, a visão maniqueísta, que divide o saber matemático em "tudo ou nada", perde o sentido. Há diferentes matizes de "cinza" no saber matemático, há uma constante e infinita evolução na formação dos conceitos e há a necessidade de sabermos onde nossos alunos se encontram em seus processos de (trans)formação contínua do pensamento matemático.

PROBLEMAS E ANÁLISE DE ERROS

Uma forma de procurarmos entender como os conceitos estão sendo formados pelos alunos é através da análise dos erros que eles cometem. De certa forma, podemos considerar que todos os acertos de um aluno não "provam" que seus conceitos estão de acordo com o que a comunidade matemática aceita como correto. Entretanto, apenas um erro é o suficiente para podermos afirmar que o modelo do aluno não é o adequado para a situação. Sendo assim, como professores, devemos prestar enorme atenção aos erros e às dificuldades dos alunos.

Com as discussões sobre o funcionamento da mente e o estudo da cognição humana, a análise de erros, de forma geral, passou a despertar grande interesse. Sob esta ótica, os erros são indicativos do funcionamento mental do indivíduo, que permitem a compreensão dos processos cognitivos. Erros são estágios necessários no desenvolvimento das idéias matemáticas e fazem parte do caminhar dos sujeitos na formação de seus conceitos. Na resolução de problemas, em particular, admitindo-se que os problemas interessantes em matemática são justamente aqueles para os quais a pessoa não possui uma solução imediata, devemos aceitar que errar é um processo normal e freqüente na busca de soluções apropriadas.

Um dos primeiros trabalhos sobre análise de erros em educação matemática, dentro da perspectiva da ciência da cognição, foi o de Brown e Burton (1978). Há quase vinte anos atrás, esses pesquisadores indicaram que muitos dos erros cometidos de forma sistemática por alunos ao resolverem contas não decorriam da incapacidade desses em aprender e seguir uma série de procedimentos. O que acontecia, em muitos casos, era que as crianças criavam e seguiam regras próprias, nem sempre corretas. Nas palavras de Maurer (1987), essa pesquisa revelou a "boa nova" de que os estudantesndo como pequenos cientistas" e desenvolvendo algoritmos pessoais para resolverem problemas. Por outro lado, também trouxe a "má notícia" de que, com grande freqüência, esses algoritmos estavam errados.

O estudo de Brown e Burton (1978) já revelava que os alunos possuiam um modelo sobre o qual trabalhavam. Portanto, não se podia, e não se pode, simplesmente, atribuir os erros que cometem à total falta de conhecimento. Muitas das dificuldades que os alunos enfrentam ao resolverem problemas são decorrentes dos modelos ingênuos, incorretos ou incompletos que possuem. Outras possíveis causas de erro são a falta de um arsenal de estratégias para resolução de problemas, a desorganização do conhecimento, as visões acerca da matemática e de si mesmos enquanto resolvedores de problemas, a escolha de esquemas errados ou a representação incorreta do problema. (Shaughnessy, 1985).

A análise dos erros dos alunos, entretanto, não deve ser vista somente com o intuito de "diagnosticar e remediar" as falhas encontradas em suas respostas.

Mais importante para a formação dos conceitos matemáticos, os erros devem ser usados como estímulo para a geração de questionamentos por parte dos próprios alunos. Nesse sentido, Borasi (1994) propõe que devemos usar os erros para pesquisar sobre o pensamento lógico-matemático: já que um erro indica que certo procedimento ou resultado não alcançou as expectativas da pessoa, ele deve constituir-se em um estímulo para novas reflexões e explorações.

O importante é que os alunos também estejam envolvidos no estudo de seus erros e dos conceitos matemáticos que estão usando. A sugestão de Borasi (1994) é que não cabe somente ao professor tentar entender como seus alunos estão pensando a fim de reprogramar suas aulas ou fornecer explicações que crê serem mais apropriadas. É preciso que os alunos se engajem na tarefa de analisar seus erros, retirando das costas do professor a função de diagnosticar as falhas. Borasi propõe, então, que os erros sejam usados com o intuito de abrirem novos caminhos para a exploração do saber matemático pelos alunos. A pesquisadora resume três diferentes posturas que os professores podem ter com relação à aprendizagem e ao uso do erro em sala de aula: remediação, descoberta e investigação em aberto. (Ver QUADRO 2).

Coerentemente com a visão de problemas e de formação de conceitos matemáticos colocada neste trabalho, é importante que os professores capitalizem em cima de erros cometidos, usando-os não apenas para compreender o pensamento matemático de seus alunos, mas, também, como trampolins que permitem o maior desenvolvimento deste pensamento. A partir dos erros encontrados em sala de aula, os alunos devem poder propor e explorar novos caminhos dentro do conhecimento matemático, em uma visão da aprendizagem que permita a investigação em aberto.

Se queremos promover uma visão do erro como algo normal e produtivo, é preciso retirar o estigma de "mau" que ele possui no aprendizado da matemática. Se errar é algo que ocorre a todos, se errar pode ter um

QUADRO 2

VISÕES DO ERRO EM MATEMÁTICA.

Postura sobre Aprendizagem	**Nível de discurso matemático**		
	Performance em tarefa específica	Compreensão de conteúdo técnico	Compreensão da natureza da matemática
Remediação	Análise de erros para compreender e remediar a falha, a fim de executar a tarefa com sucesso na próxima vez.	Análise de erro para corrigir dúvidas sobre aspectos técnicos do conteúdo matemático.	Análise de erros para corrigir dúvidas sobre a natureza da matemática sobre questões gerais da matemática.
Descoberta	Erros são usados construtivamente no processo de resolução de um problema novo, comparando e avaliando resultados.	Erros são usados construtivamente quando alguém aprende sobre um novo tópico, regra, conceito, etc.	Erros são usados construtivamente quando alguém aprende sobre a natureza da matemática ou sobre questões gerais da matemática.
Investigação em aberto	Erros geram questões para investigações e apontam novas direções e novas tarefas a resolver.	Erros geram questões que podem levar a insights sobre tópicos matemáticos fora do plano original.	Erros geram questões que podem levar a novas percepções sobre a natureza da matemática.

Retirado e adaptado de Borasi, 1994, p.193

lado positivo e se também a partir do erros podemos evoluir na formação dos conceitos matemáticos, devemos criar em sala de aula uma nova postura com relação ao erro e uma nova atitude com relação à matemática. Não faço aqui uma apologia ao erro. Entretanto, defendo que tanto alunos como professores têm muito a aprender com o erro para que o tratem como algo intrinsecamente ruim.

PROBLEMAS E A QUESTÃO AFETIVA

Inicialmente, os estudos sobre resolução de problemas tentaram estudar o sistema cognitivo "puro". Entretanto, principalmente a partir do início dos anos 80, pesquisadores vêm indicando a importância e a necessidade de se incluir os fatores afetivos nos estudos da ciências da cognição (Norman, 1981). E, talvez mais importante, muitos trabalhos vêm apontando para o fato de que não podemos tratar do sistema cognitivo sem tratar do afetivo. Parece-nos, hoje, que sequer podemos falar em um sistema cognitivo "puro".

Em educação matemática, a teoria de Mandler (1984) sobre as emoções foi uma das que mais contribuiu para a incorporação definitiva de questões afetivas ao estudo da resolução de problemas. De acordo com essa teoria, uma das maiores fontes de emoção é a interrupção do plano de ação de um indivíduo. Quando um esquema é ativado, iniciando-se uma seqüência de ações, a pessoa tende a querer completar tal seqüência. Ocorrendo uma interrupção, o plano da pessoa não pode ser concluído e essa impossibilidade de conclusão gera uma reação emocional.

Como vimos, os problemas mais interessantes para a formação dos conceitos matemáticos são aqueles para os quais a pessoa não possui, de antemão, um esquema de resolução. Essas são, entretanto, exatamente as situações que geram interrupções nos planos de ação e, conseqüentemente, reações emocionais. Nas aulas tradicionais de Matemática, os alunos estão acostumados a resolverem muitos exercícios de fixação, todos semelhantes, e esperam poder completar, com certa rapidez e com apenas uma conta, todos os exercícios que fazem. Quando se deparam com problemas verdadeiros, que fogem à rotina dos exercícios repetitivos, as expectativas dos alunos são frustradas, produzindo intensa reação emocional.

Dentro da sala de aula, as questões afetivas passam por conceitos como os de autoconfiança, autoestima, persistência, independência, interesse, fobia, pânico, ansiedade, motivação, atitudes e atribuições causais para o sucesso ou o fracasso em Matemática. Essas diferentes classificações estão ligadas à noção de que as reações afetivas podem variar em intensidade (forte ou fraca), em sentido (positiva ou negativa), em duração, no nível de consciência e no nível de controle que cada pessoa possui (McLeod, 1988). Esses fatores influenciam, de diferentes formas, os vários tipos de processos cognitivos e afetivos pelos quais as pessoas passam ao se depararem com um problema matemático.

McLeod (1992) levanta três pontos a serem considerados no estudo das interrupções que uma pessoa pode sofrer. Primeiro, quando há uma interrupção, há uma interpretação cognitiva do fenômeno. Ou seja, a pessoa analisa a interrupção e faz um julgamento baseado naquilo que assume como correto ou verdadeiro e naquilo que crê saber. Sendo assim, as crenças[2] de uma pessoa acerca de si mesma e da matemática são importantes para o estudo das questões afetivas porque elas indicam, em cada situação, o sentido da emoção. No desenvolvimento das crenças da pessoa o meio cultural em que ela se insere é da maior relevância. Portanto, fatores sócio-culturais também são importantes para o estudo das questões afetivas na resolução de problemas em matemática.

2. A terminologia aqui usada, embora talvez não seja a mais apropriada, segue o termo inglês "beliefs". Talvez fosse mais correto falarmos em "visões" ou "concepções" da matemática e de si mesmo, já que o termo "crença" tem, para nós, sentido religioso e subjetivo. Entretanto, esses dois termos são normalmente usados para designar um sistema de crenças, ou seja, algo maior, mais complexo e mais integrado do que o que aqui estamos designando crença. Assim sendo, optamos por seguir a literatura internacional no uso desse termo.

Segundo, a sensação de interrupção, que gera uma reação emotiva, tem duração limitada. Indivíduos normais tendem a se ajustarem ao evento inesperado e tentam achar uma nova forma de prosseguirem com seus planos, a fim de alcançarem seus objetivos. A emoção de uma pessoa pode ser muito intensa; porém, normalmente, ela é passageira — ao menos inicialmente.

Terceiro, a ocorrência de repetidas interrupções em um mesmo contexto tende a diminuir a intensidade da reação emotiva. De certa forma, essa repetição do sentimento faz com que o indivíduo se acostume com as interrupções nessa mesma situação. O indivíduo passa a responder às interrupções, nesse contexto, de forma quase automática; sua resposta torna-se mais estável e previsível, transformando-se no que muitos chamam de atitude (positiva ou negativa) com relação à matemática.

Os pontos colocados por McLeod (1992) trazem, para o debate no campo afetivo, três itens considerados fundamentais para a comunidade de educadores matemáticos: as crenças que as pessoas têm acerca de si mesmas, acerca da Matemática enquanto ciência e acerca do ensino-aprendizagem de matemática; a intensidade das emoções que as pessoas sentem ao se depararem com questões matemáticas que não serão realizáveis prontamente; e as atitudes que as pessoas desenvolvem com relação à Matemática. Essas questões têm recebido grande atenção dos pesquisadores em educação matemática, principalmente nos últimos 10 anos, e também têm reforçado a importância de estudarmos o contexto social no qual a aprendizagem matemática ocorre. A presença de questões afetivas no ensino e aprendizagem de matemática torna-se, portanto, fator de fundamental importância para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

PROBLEMAS E METACOGNIÇÃO

As reações afetivas de uma pessoa perante um problema matemático evidenciam que nem sempre podemos explicar o sucesso ou o fracasso do indivíduo considerando apenas o conhecimento matemático que ele possui (embora esse conhecimento seja condição necessária para o possível sucesso do sujeito). Outros fatores, além dos afetivos, também influenciam o desempenho em atividades de resolução de problemas. Por exemplo, é necessário possuir certo conhecimento e controle sobre a própria cognição para se resolver um problema, dado que muitas das dificuldades apresentadas neste tipo de atividade vêm da incapacidade de monitorar e regular a cognição.

O conhecimento que uma pessoa possui acerca de seus próprios processos cognitivos, dos resultados desses processos ou de outros fatores ligados a eles é denominado de metacognição. (Flavell, 1976). Em outras palavras, a metacognição é a cognição acerca da própria cognição.

Quando trabalhamos com o pensamento matemático, nem sempre é fácil ou simples distinguir entre cognição e metacognição. Estudando a resolução de problemas em matemática, Garofalo e Lester (1985) propõem que a cognição está ligada ao fazer, enquanto a metacognição relaciona-se à escolha e ao planejamento do que fazer, bem como à monitoração do que está sendo feito. Eles destacam dois aspectos distintos da metacognição: o saber sobre a cognição e a regulação da cognição.

O primeiro aspecto está ligado ao que a pessoa sabe acerca das habilidades, dos processos e dos recursos cognitivos necessários para a execução de uma tarefa específica. Esse saber pode estar ligado à própria pessoa (avaliação de sua capacidade e suas limitações com relação à matemática, em geral, e ao assunto específico do problema apresentado), à tarefa (quais seus objetivos, quais seus pré-requisitos, o que a torna mais ou menos fácil), ou às estratégias úteis na execução da tarefa (quais estratégias, algoritmos ou heurísticas devem ser usados, quando e como). O saber sobre a tarefa e sobre as estratégias úteis influencia na escolha do caminho a ser seguido em cada momento da trajetória da resolução de um problema, bem como na decisão de mudar de caminho em um certo ponto. É esse saber que leva a pessoa a monitorar suas próprias ações e regular o uso de estratégias distintas — o segundo aspecto da metacognição. A regulação da cognição envolve, portanto, a seleção de estratégias para ajudar na compreensão de um problema, no planejamento das ações, na execução do plano, na monitoração dessa execução, na avaliação dos resultados e na eventual decisão de abandonar estratégias ou planos que se mostram improdutivos ou incorretos.

Para a resolução de problemas, Polya (1976) coloca quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano de ação, execução do plano e retrospecto para verificação dos resultados. Estendendo essas fases, Garofalo e Lester (1985) propõem uma estrutura cognitiva-metacognitiva organizada em quatro categorias de atividades envolvidas na performance de uma tarefa matemática. Essas categorias são orientação, organização, execução e verificação e cada uma delas está associada a certas operações cognitivas e metacognitivas que o sujeito precisa desempenhar. (Ver QUADRO 3).

Essas quatro categorias representam pontos chaves nos quais a performance em tarefas matemáticas requer decisões metacognitivas que influenciam as

QUADRO 3

ESTRUTURA COGNITIVA-METACOGNITIVA.

Orientação: comportamento estratégico de avaliação e compreensão do problema.
- A. Estratégias de compreensão
- B. Análise de informações e condições
- C. Avaliação da familiaridade da tarefa
- D. Representação inicial e subseqüente
- E. Avaliação do nível de dificuldade e das chances de sucesso.

Organização: planejamento e escolha das ações.
- A. Identificação de objetivos
- B. Planejamento global
- C. Planejamento local (para a implementação do plano global)

Execução: regulação do comportamento para seguir o plano.
- A. Performance das ações locais
- B. Monitoração do progresso dos planos locais e globais
- C. Decisões sobre troca (por exemplo, velocidade ou precisão?)

Verificação: avaliação das decisões tomadas e das conseqüências dos planos executados.
- A. Avaliação da orientação e da organização
  1. Adequação da representação
  2. Adequação das decisões organizacionais
  3. Consistência entre planos locais e globais
  4. Consistência entre os planos globais e os objetivos
- B. Avaliação da execução
  1. Adequação da performance das ações
  2. Consistência das ações com o plano
  3. Consistência dos resultados locais com os planos e as condições do problema
  4. Consistência do resultado final com as condições do problema.

Retirado e adaptado de Garofalo e Lester, 1985, p.171

ações cognitivas. Para Garofalo e Lester (1985), o ponto no qual decisões metacognitivas têm maior probabilidade de ocorrer depende do problema que a pessoa está tratando. Uma tarefa que requer apenas a execução de um algoritmo, quando apresentada a quem já domina os procedimentos necessários, basicamente não requer decisões metacognitivas. Por outro lado, um problema relativamente simples, que em seu enunciado apresenta dados extras e informações desnecessárias, pode precisar de muitas decisões metacognitivas durante a orientação e organização da tarefa, mas poucas decisões dessa ordem depois que a pessoa "limpa" o problema e começa a executá-lo.

A partir de suas observações de alunos resolvendo problemas, Schoenfeld (1987) também conclui que o importante nem sempre é o que a pessoa sabe: a forma pela qual ela usa seus conhecimentos determina sua possibilidade de sair-se bem resolvendo problemas. Através da análise de vídeo-teipes, Schoenfeld notou que seus alunos passavam alguns minutos lendo o problema e depois começavam a explorar diferentes caminhos para a resolução do mesmo. Em nenhum momento os alunos paravam para analisar o problema, fazer um plano, implementar este plano ou verificar aquilo que estavam fazendo. Eles nunca se perguntavam se o que estavam fazendo iria levá-los a algum lugar ou se deveriam testar algo diferente. Esse exemplo mostra a falta de autoregulação desses alunos.

Schoenfeld (1987) prossegue sua análise comparando a performance dos alunos com a de um matemático que se depara com um problema complexo. O matemático lê o problema, analisa, passa alguns minutos fazendo e implementando um plano, verifica o que está fazendo, volta a analisar o problema, explora uma idéia, faz outro plano, executa, verifica e conclui o problema. A distribuição do tempo gasto entre ler, analisar, explorar, planejar, implementar e verificar mostra a diferença dos processos metacognitivos usados nos dois casos.

Esse tipo de pesquisa, comparando novato e *expert*, foi muito utilizado na década de 80. Dessas pesquisas aprendemos, por exemplo, que os *experts* não só sabem mais matemática, mas também possuem um saber "diferente", por ser bem organizado e possuir muitas conexões e esquemas mais ricos. Ao resolver um problema, novatos concentram-se em aspectos superficiais e circunstanciais, enquanto *experts* focam sua atenção na estrutura do problema. Além disso, os bons resolvedores de problema têm consciência de seus limites e dificuldades, conseguindo monitorar e controlar seus esforços. (Lester, 1994).

Devemos observar que, nesse tipo de pesquisa, estamos comparando pessoas que encaram um problema pela primeira vez e, portanto, precisam trabalhar produzindo *insights*, com pessoas que têm muita experiência com problemas e podem trabalhar em cima dos *insights* que já possuem. Assim, mesmo quando um matemático depara-se com uma situação que é um problema para ele, no sentido usado para esse termo neste trabalho, ele possui um enorme arquivo de situações e "*insights* anteriores" aos quais pode recorrer na sua busca de solução.

Como vemos, a resolução de problemas matemáticos para os quais não possuímos um caminho relativamente imediato, que nos leve à solução, requer que trabalhemos não só com nossa cognição, mas também com o controle e a monitoração dessa cognição. Assim, esses problemas não apenas enriquecem nossos conceitos matemáticos, eles também colaboram para o conhecimento que temos acerca de nós mesmos, de nossos conhecimentos e de nossa própria cognição. Esses problemas são, portanto, a fonte de nosso saber matemático bem como de nossa capacidade de nos organizarmos para a execução de tarefas matemáticas.

PARA CONCLUIR...

Retornamos aqui à pergunta inicial do texto: por que tamanha importância é dada à resolução de problemas em educação matemática? Cremos que a resposta está clara neste trabalho, que levantou vários pontos importantes sobre esse assunto. Entretanto, a fim de pontuar o que vimos, lembramos que: problemas são essenciais para a formação dos conceitos matemáticos, eles são a base dessa construção; problemas nos permitem explorar o saber matemático e os pontos nos quais as idéias não estão claras; problemas lidam com nossas emoções; problemas requerem que conheçamos e possamos regular nossos processos cognitivos. Assim, a resolução de problemas é da maior importância em Matemática, pois é a partir dos problemas que nos deparamos com aspectos fundamentais do pensamento matemático.

Ao contrário do que indica o senso comum, cremos, hoje, que o pensamento matemático é dinâmico, envolve emoções e requer autocontrole. O erro, em matemática, é um reflexo e, ao mesmo tempo, um instrumento de modificação do pensamento, que está em constante transformação. Assim, saber matemática é muito mais do que decorar e aplicar fórmulas ou algoritmos. Saber matemática significa fazer conexões entre diferentes representações, ser capaz de enfrentar novos problemas, rearrumar esquemas para usá-los de formas diferentes e descontextualizar o que aprendemos a fim de aplicá-lo em diversas situações.

A discussão sobre resolução de problemas e formação de conceitos matemáticos trouxe para o debate em educação matemática assuntos como análise de erros, questões afetivas e metacognição. A habilidade de resolver problemas depende, além do conhecimento da matemática, da forma de tratar o erro, de crenças, de emoções, do contexto sócio-cultural, do autocontrole, etc. Todas essas novas janelas, que se abrem quando ampliamos nossas considerações sobre o pensamento matemático, permitem novos vôos, novas idéias e novas pesquisas. Para o professor, essas novas janelas abertas exigem a reavaliação do que está sendo feito em sala de aula. É preciso resolver problemas em matemática e ensinar matemática através da resolução de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, J.R. ***Cognitive psychology and its implications***. San Francisco: W. H. Freeman, 1980.

BORASI, R. Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": a teaching experiment. ***Journal for research in mathematics education***, n.25, p.166-208, 1994.

BROWN, J. S. & Burton, R. R. Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. ***Cognitive Science***, n.2, p.155-192, 1978.

DANTE, L. R. ***Didática da resolução de problemas***. São Paulo: Ática, 1989.

FLAVELL, J.H. Metacognitive aspects of problem solving. In L.Resnick (Ed.). ***The nature of intelligence***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1976.

FUSSON, K.C. Research on whole number addition and subtraction. In: D.A. Grouws (Ed.). ***Handbook of research in mathematics teaching and learning***. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

GAROFALO, J. & Lester Jr., F.K. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. ***Journal for research in mathematics education***, n.16, p.163-176, 1985.

LESTER, F. K., Jr. Musings about mathematical problem solving research: 1970-1994. ***Journal for research in mathematics education***, n.25, p.660-675, 1994.

LESTER, F. K., Jr. Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E. A. Silver (Ed.), ***Teaching and learning mathematical problem solving: a multiple research perspective***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1985.

MANDLER, G. ***Mind and body:*** psychology of emotion and stress. New York: Norton, 1984.

MAURER, S. B. New knowledge about errors and new views about learners: What they mean to educators and more educators would like to know. In: A.H. Schoenfeld (Ed.), ***Cognitive Science and Mathematics Education***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1987.

McLEOD, D. B. Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), ***Handbook of research in mathematics teaching and learning***. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

McLEOD, D. B. Affective issues in mathematical problem solving: some theoretical considerations. ***Journal for research in mathematics education***, v.19, p.134-141, 1988.

NEWELL, A. & Simon, H. A. ***Human Problem Solving***. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1972.

NORMAN, D. A. Twelve issues for cognitive science. In: D. A. Norman (Ed.), ***Perspectives in cognitive science***. Norwood, NJ: Ablex. 1981.

POLYA, G. ***A arte de resolver problemas***. Rio de Janeiro: Interciências. 1976.

SCHOENFELD, A. H. What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), ***Cognitive Science and Mathematics Education***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1987.

SHAUGHNESSY, J. M. Problem-solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: E. A. Silver (Ed.), ***Teaching and learning mathematical problem solving: a multiple research perspective***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1985.

STANIC, G. M. A. & Kilpatrick, J. Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In: R. I. Charlles & E. A. Silver (Eds.), ***The teaching and assessing of mathematical problem solving***. Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics, 1989.

VERGNAUD, G. Teorias dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1, 1995, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, 1995.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: J. Hiebert and M. Behr (Eds.), ***Number concepts and operations in the middle grades***. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates, 1988.

VERGNAUD, G. Didactics as a content-oriented approach to research on the learning of physics, mathematics and natural language. In: ENCONTRO DA AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1984, Nova Orleans: [s.ed.], 1984.

VERGNAUD, G. Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. ***For the learning of mathematics***, v.3, n.2, p.31-41. 1982.