

# Heurística e Educação Matemática

Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca \*

## RESUMO

O texto que se segue é uma tentativa de organizar informações coletadas na revisão de uma literatura, digamos, "clássica" a respeito de "Heurística e ensino da Matemática". As questões que achei relevantes (e também recorrentes) nos textos consultados são apresentadas, indicando autores e referências para que, levantando algumas das idéias e posturas sobre o assunto e dando a conhecer sua paternidade (às vezes, compartilhada), possa, de alguma forma, auxiliar os que se dispõem a aprofundar as pesquisas ou ensaiar propostas para o ensino.

**Descritores:** Educação - Ensino da Matemática - Heurística - Resolução de Problemas.

## ABSTRACT

This text is an attempt to organize pieces of information collected in the reviewing of a "classic" literature about "Heuristic and Mathematics Teaching". It presents schematically relevant and recurring questions in the texts researched pointing out authors and references in order to outline ideas and positions about this matter and make it known their paternity (sometimes shared by more than one person). All these procedures will help people who want to make a deeper research or to venture in proposition for teaching.

**Describers:** Education, Mathematics teaching, Heuristic, Problem solution.

\* Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino da Faculdade de Educação da UFMG



## 1. O que é Heurística?

Na vida cotidiana, freqüentemente surgem diante do homem situações em que as circunstâncias e as exigências do exercício de uma atividade geram conflitos. Ele precisa executar uma série de ações e solucionar este ou aquele problema. Contudo, as condições reinantes não lhe proporcionam meios para solucionar esses problemas, e mesmo todo o arsenal de experiências passadas não lhe apresenta qualquer esquema completo adequado às condições emergentes. A fim de descobrir uma saída para essa situação, o homem deve criar uma nova estratégia de ação, isto é, concretizar um ato de criação. Contingência como esta é, normalmente, denominada um "problema" ou uma "situação problemática", ao passo que o processo psíquico que, para auxiliar sua solução, elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito, é designado como "pensamento criador", ou, para usarmos uma terminologia que nos vem de Arquimedes, "atividade heurística". (PUCKIN, 1969, p. 8)

HEURÍSTICA era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, "muitas vezes delineado, mas raramente apresentado com detalhes". (POLYA, 1978, p. 86)

As origens desta "ciência" remontam talvez aos trabalhos de alguns comentaristas de Euclides. Destaca-se na história do desenvolvimento deste estudo o nome de Pappus, famoso matemático grego do século III a.C., autor do livro "O Tesouro da Análise" ou "A Arte de Resolver Problemas". As mais famosas tentativas de sistematização da HEURÍSTICA devem-se a Descartes (1596-1650) e Leibnitz (1646-1716), ambos grandes matemáticos e filósofos. Deve-se citar ainda uma notável descrição pormenorizada da HEURÍSTICA, elaborada por Bernard Bolzano (1781-1844). (POLYA, 1978)

O objetivo da HEURÍSTICA é o estudo dos métodos e das regras de descoberta e da invenção. Assim, a HEURÍSTICA, "ciência ou arte da pesquisa e da invenção", propõe-se responder à pergunta: "Como proceder para resolver problemas?", o que sugere a possibilidade de existir um método analítico para o descobrimento de verdades científicas. (HOLANDA, s.d. verbete: Heurística)

A HEURÍSTICA será, pois, a ciência que estuda as constantes da atividade do pensamento criador. Não importa o tipo de problemas pois o que procuramos são os aspectos comuns na maneira de tratar os mais variados deles: consideram-se os aspectos gerais,

independentemente do assunto específico de cada um.

Seus objetivos, no entanto, não se reduzem às pesquisas das constantes do pensamento criador, mas compreendem também a elaboração de métodos e modos de direção dos processos heurísticos.

Para tanto, a HEURÍSTICA moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais típicas desse processo, que tenham utilidade. Levam-se em conta tanto as bases lógicas, quanto as psicológicas. (PUCKIN, 1969; POLYA, 1978)

Ainda que aos problemas heurísticos se dediquem atualmente engenheiros e matemáticos, psicólogos e fisiólogos, pedagogos e administradores de empresa, e ciências tais como a Psicologia e a Sociologia e até a Neurologia e a Química Psicológica, na busca da conquista de meios de estímulo ao trabalho cerebral criador (PUCKIN, 1969), a base sobre a qual se assenta a HEURÍSTICA, segundo POLYA (1978), deverá ser sempre a experiência na resolução de problemas e a experiência na observação desta atividade quando realizada por outros.

## 2. Problema?

Muito se tem falado sobre "resolução de problemas". Afinal, o que é um "PROBLEMA"?

A palavra vem do grego "PROBLIMA", pelo latim "PROBLEMA". Pode referir-se a uma questão (matemática) proposta para que se lhe dê uma solução, ou uma questão não solvida e que é objeto de discussão (em qualquer domínio do conhecimento). Trata-se outras vezes de uma proposta duvidosa que pode ter numerosas soluções, ou qualquer questão que dê margem a hesitação ou perplexidade, porque difícil de explicar ou resolver. Em psicologia, PROBLEMA poderá ser, ainda, um conflito afetivo que impede ou afeta o equilíbrio psicológico do indivíduo. (HOLANDA, s.d., verbete: Problema)

Em seu "PEQUENO DICIONÁRIO DE HEURÍSTICA", POLYA (1978) não incluiu o verbete PROBLEMA, embora discorra sobre problemas "auxiliar", "rotineiro", "de determinação", "de demonstração" e "práticos". Muitas vezes, a utilização demasiado freqüente do termo dissimula a necessidade de nos determos na reflexão sobre o seu significado.

Talvez restringindo um pouco, vamos caracterizar o "PROBLEMA" pelo desencadeamento de um comportamento típico: a alegria da descoberta. Assim, uma questão da qual já se conhece a resposta não será um PROBLEMA. O PROBLEMA tem que possuir o elemento da incerteza. É ele que instiga e faz da busca da solução uma aventura real e não um mero encadeamento de atitudes já de antemão previsíveis. (GLAESER, 1971)

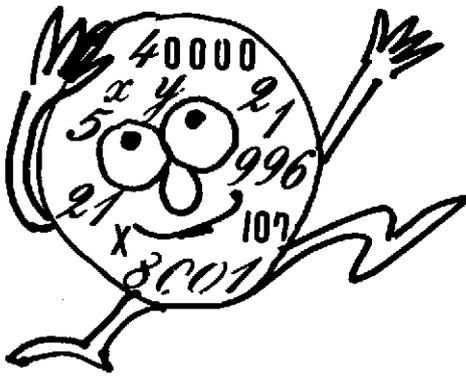
Ser ou não ser um PROBLEMA dependerá, ainda, da reação daquele para quem se apresentou a questão. Se a pessoa não encontra uma solução óbvia, imediata, mas reconhece que a conjuntura exige uma ação e quer ou precisa agir sobre ela, então, encontra-se mesmo diante de um PROBLEMA. (GAZIRE, 1988)

Isso nos leva também a considerar que, conforme se formula uma questão, ela poderá ser ou não um PROBLEMA, pois que desencadeará ou não a atitude de enfrentamento e busca que caracteriza o resolvidor de problema, como tal.

## 3. Heurística e resolução de problemas

### A vida é só resolver problemas?

Muitos pesquisadores têm-se dedicado à análise dos métodos heurísticos. Os problemas da atividade intelectual criadora atraem cada vez maior atenção dos representantes de várias especialidades.



Não é, evidentemente, apenas a curiosidade científica que motiva essas pesquisas. Há grande interesse prático. Nos últimos anos, ficou patente que o estudo da Heurística pode ter grande influência no progresso técnico. Quando surge diante da humanidade qualquer problema científico ou técnico, para o qual inexistem meios determinados e nítidos de resolução (um problema com um campo de procura indefinido), sua solução não pode ser obtida fora da atividade mental concreta de homens concretos.

Por isso, a atividade heurística de um técnico, um cientista, um inventor, ainda que individual, cumpre uma função na comunidade humana. Produz tecnologia, produz teorias que explicam os enigmas da natureza. E quanto mais rapidamente se desenvolvem a ciência e a técnica, tanto maior é a importância da atividade intelectual criadora do homem na vida social, tanto maiores as exigências quanto à intensidade e eficiência dessa atividade (PUCKIN, 1969).

Empolgando-se com tais considerações, pode haver quem se arrisque a defender a preocupação com a heurística por ser a própria vida uma sucessão de problemas (entendido num sentido amplo). Desta maneira, o pensamento, de sua parte, identificar-se-ia com a própria atividade heurística.

No entanto, a noção de atividade heurística é algo mais restrito do que o pensamento. Predominam na atividade mental humana diversas operações intelectuais elaboradas durante a aprendizagem e o desenvolvimento, bem como imagens intelectuais e automatismos. Cotidianamente, através de processos deste tipo, vêm sendo resolvidos muitos problemas humanos. Conquanto incluam as operações intelectuais como suas componentes, a atividade ou os processos heurísticos possuem, ao mesmo tempo, sua própria especificidade. Exatamente por isso é que se deve interpretar a atividade heurística como uma variante do pensamento humano, geratriz de novos sistemas de ação, o qual desvenda as constantes dos objetos à volta do homem, que até então permaneciam desconhecidos. (PUCKIN, 1969, p. 9)

É, sem dúvida, uma variante considerável, mas o pensamento humano é mais que um mero "re-organizador" de informações e estratégias. Sua própria "fluidez" lhe confere, por vezes, um caráter de "gratuidade". Essa gratuidade liberta o homem da objetividade, faz de sua vida mais que uma "sucessão de problemas".

A contemplação, o êxtase, o não-pensar: são também variantes do pensamento. Emergem nos momentos em que a vida é entrega.

#### 4. A resolução de problemas e o ensino (da matemática)

A vida não é só resolver problemas.

Mas, muitas vezes, resolver problemas é o que se nos apresenta.

À medida que o homem incrementa sua vida de relação, multiplicam-se as situações e as possibilidades de combinações novas de contingências, que exigem dele uma resposta inédita. A elaboração da estratégia de sua ação requer, sem dúvida, algo de pessoal, a criatividade, que é própria do indivíduo. Mas pede também uma certa habilidade, talvez uma intimidade com os recursos (externos e internos) de que dispõe: um certo "treino" em lidar com o novo, que estimule a curiosidade, permita o "desarme", abra à compreensão, fertilize a criação, ilumine o discernimento, oriente o planejamento, encoraje a ação, fortaleça a perseverança, aguace a criatividade e acene com a esperança da alegria da descoberta.

Assim, se em nossa vida vamo-nos deparar com inúmeros problemas a resolver, é justo que nossa educação inclua algum treinamento na habilidade de resolver problemas.

O ensino de Matemática pode oferecer, neste aspecto, grandes oportunidades. Se se desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com seus conhecimentos e interesses, auxiliando-os, por vezes, e abandonando-os (sempre que forem capazes de caminhar sozinhos) à aventura da busca, ser-lhes-ão proporcionadas a experiência da tensão e a alegria da descoberta ou, ainda, as lições do fracasso, que podem ser fundamentais para o desenvolvimento crítico de suas potencialidades. (POLYA, 1978)

Vista assim, a resolução de problemas poderia assumir o "status" de CONTEÚDO do ensino, como preconiza o trabalho do IREM de Strasbourg, "Pedagogie de l'exercice et du problème" (1976). Desta maneira, tomada como um processo, cuja aprendizagem é básica para a formação do aluno, ou seja, como uma "atividade matemática formadora", a resolução de problemas deveria ser proposta pelos próprios programas oficiais para que, depois, se escolhessem as teorias, ensinadas em função dos problemas que se poderão submeter aos alunos.

Entretanto, encarada como CONTEÚDO do ensino de matemática, a resolução de problemas poderia receber enfoques diferentes: Acreditando-se que ensinar Matemática equivale a ensinar a resolver problemas, a "resolução de problemas" apareceria como o próprio objetivo da tarefa do ensino, mas ela poderia surgir, por outro lado, tão-somente como uma habilidade básica para a matemática, como o é, por exemplo, fazer contas. (GAZIRE, 1987)

Parece-nos, porém, que a resolução de problemas só agora começa a despontar, e ainda timidamente, como CONTEÚDO de



ensino. O que vemos mais freqüentemente são problemas sugeridos como APLICAÇÃO do conteúdo dado, ou, na melhor das hipóteses, como MOTIVAÇÃO ou METODOLOGIA de ensino.

- Neste caso, o que temos então é a resolução de problemas posta a serviço - e de maneira bastante significativa - do ensino de Matemática.

Atualmente, muitos encaram a Matemática como um produto "pronto e acabado": a uma análise segue-se uma síntese formalizada e o resultado é apresentado como Matemática "pronta". Tem-se a impressão de que não há questões, não há problemas, não há dúvidas, não há possibilidade de enganos, desvios, erros ou fracassos. Tudo já foi feito. A Matemática é um conhecimento estático. (FREUDENTHAL, 1973)

No entanto, todo matemático sabe, ao menos no nível do inconsciente, que, além da Matemática "pronta", existe a Matemática que é atividade, é processo, é conhecimento dinâmico, com avanços e retrocessos, dúvidas e suspeitas, possibilidades múltiplas e potencialidades inexploradas.

O desconhecimento da "Matemática ativa" por parte dos não-matemáticos deve-se, em grande parte, ao antagonismo que se estabeleceu entre a Matemática "que se aprende na escola" e a "verdadeira Matemática".

Fundamentalmente, existe uma Matemática que é ciência ativa sob a responsabilidade competente dos seus adeptos (muito acima do alcance das "pessoas comuns") e uma Matemática que é ciência já pronta, uma coleção de algoritmos, uma diluição da primeira, uma "Matemática de mentirinha" para escolares (FREUDENTHAL, 1973)

É claro que, para ser ensinada, uma ciência deve ser adaptada à capacidade dos aprendizes, mas o que ocorreu foi que a versão "escolar" da Matemática desenvolveu-se independentemente da "verdadeira" Matemática, chegando, após um século de autonomia, a um impasse, pois não leva a parte alguma: nem à Matemática avançada, nem à vida.

Isso é fruto da dificuldade de se conciliar o ensino da Matemática - um "sistema dedutivo", uma "ciência pronta" - com o esforço pedagógico de estimular uma aprendizagem ativa. A saída encontrada parece ser as tais "aplicações", problemas que não fazem mais do que substituir os parâmetros das proposições gerais por valores especiais. Não é de se admirar que o aluno acabe construindo uma imagem um tanto caricatural da Matemática, durante os seus muitos anos de escola. (FREUDENTHAL, 1973)

Entretanto, a preocupação com o ensino da Matemática tem aumentado à medida que aumenta a importância da própria Matemática. Se a Matemática é para ser aplicada, deve-se ensinar e aprender a aplicar a Matemática. Mas "aplicar Matemática" é mais do que substituir os parâmetros dos teoremas e teorias por valores numéricos. Cada vez que a Matemática é aplicada, ela deve ser "re-criada". E isso não pode ser feito aprendendo Matemática como um "produto acabado". Se o aluno deve aprender a "re-inventar" a Matemática, deve aprender "re-inventando"... como se fora um matemático. O conhecimento e a habilidade adquiridos por "re-invenção" são melhor compreendidos e mais facilmente preservados do que os assimilados por um processo menos ativo. (FREUDENTHAL, 1973)

"Resolver problemas" é uma atividade que oferece boas oportunidades de criação (ou "re-criação").

Se estamos de fato, diante de um problema, de uma situação nova, de questões para as quais não temos uma resposta imediata, temos que "re-organizar" os conhecimentos de que dispomos e "re-dimensioná-los"; tentar novas combinações e avaliá-las criticamente; aventurar-nos com audácia e discernir com sagacidade; enfim, encerrar o novo que nos chega e responder com o novo que

criamos ou "re-criamos" novamente.

Tomando a resolução de problemas como METODOLOGIA de ensino, é possível ter-se para com a Matemática este tipo de atitude. A Matemática apresentar-se-á aos alunos como algo que está nascendo diante deles, e por suas mãos. Se bem motivados e orientados, os alunos sentir-se-ão mais à vontade ao lidar com ela, porque "autores" (ou "co-autores") das estratégias e resultados, porque produziram o conhecimento com que estão lidando, ou foram buscá-lo por "sua conta"... "e risco".

Esta intimidade, essa experiência de criar Matemática, de vê-la e fazê-la nascer e se desenvolver, talvez possa reverter a distorção da imagem da "Matemática pronta" que lega ao aprendiz uma sensação de impotência e uma atitude de passividade... e distância.

Contudo, conforme o enfoque que se dê ou o objetivo que se vise, hão de variar os "tipos" de problemas ou as suas formulações para se adequarem às situações. Isso talvez mereça um comentário mais demorado, no qual nos deteremos a seguir.

## 5. Tipos de problemas

Talvez fosse até mais correto dizer "Tipos de Enunciados de Problemas", pois parece ser a formulação do problema o que na verdade o caracteriza.

De fato, à diversidade de atitudes que se procuram suscitar nos alunos corresponde uma tal diversidade de enunciados para os problemas que lhe deverão ser propostos.

Assim, para Butts (BURIASCO, 1984): Se pretendemos do resolvidor que lembre ou reconheça um fato específico, uma definição ou teorema, há que se formular o problema como um EXERCÍCIO DE RECONHECIMENTO.

**Exemplo 1)** Dos símbolos abaixo, quais representam números naturais?

$$3; \sqrt{4}; \frac{2}{3}; \pi; \frac{16}{8}; \sqrt{2}; 1,0; 0$$

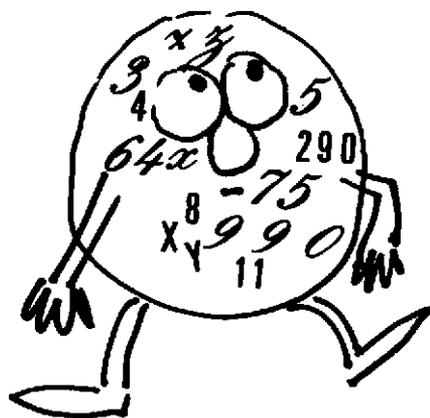
Há problemas que poderão ser resolvidos simplesmente acompanhando um procedimento passo-a-passo. Esses são os EXERCÍCIOS ALGORÍMICOS.

**Exemplo 2)** Encontre o M.M.C. entre 12, 15 e 16, pela fatoração simultânea.

- Os PROBLEMAS DE APLICAÇÃO vão exigir do resolvidor habilidade para "tradução" dos dados e relações para a linguagem matemática pois requerem, em primeiro lugar, que se faça uma formulação simbólica, e, só depois, se passe à manipulação dos símbolos, de acordo com os vários algoritmos.

**Exemplo 3)** Num treino de resistência, três "maratonistas" ficam dando voltas numa pista circular, mantendo sua velocidade constante. Partiram da mesma linha, ao mesmo tempo. Um deles, gasta 12 minutos em cada volta; o outro gasta 15; e o outro 16 minutos em cada volta. Depois de quanto tempo eles estarão de novo juntos na linha de onde largaram? (compare com o exemplo 2)

- Quando se quer estimular a imaginação, a capacidade de estimar um resultado, a própria intuição e a criatividade, talvez mesmo o espírito aventureiro, a coragem (mas também a criticidade) para o "chute", propõe-se o que Butts chama de PROBLEMAS EM ABERTO. Estes não contêm em seu enunciado a estratégia para a solução, exigirão do aluno uma certa sagacidade para aventar possibilidades e discernir aquelas com melhores possibilidades de êxito.



**Exemplo 4)** Se alguém pensar um número entre 1 e 15 e me disser apenas em quais dos quadros ele se encontra, eu "advinho" que número é. Descubra como e por quê. Atenção: eu NÃO sei os quadros "de cor".

QUADRO A	QUADRO B	QUADRO C	QUADRO D
1 7	2 6	5 13	10 11
15 13	10 15	4 6	9 12
3 5	11 14	12 7	8 14
9 11	7 3	15 14	15 13

- Há ainda as SITUAÇÕES PROBLEMAS, por vezes propostas pelo professor, mas melhor ainda quando apresentadas ou destacadas do cotidiano pelos alunos. O passo crucial, neste caso, é identificar o problema, ou os problemas que poderão emergir naquela situação.

**Exemplo 5)** Precisamos planejar nossa festa de fim-de-ano, tomando diversas providências inclusive um orçamento para recolher as contribuições.

**Le Livre du Problème**, Vol. 1 (IREM, 1976) apresenta uma classificação dos diversos enunciados, a partir dos comportamentos que se almeja provocar no aluno. De certa forma, engloba a classificação de Butts, sendo, porém, mais detalhada, e, principalmente, mais ampla, pois que são também mais amplas as possibilidades que vislumbra para a resolução de problemas no ensino de Matemática.

Nesta abordagem, há uma preocupação de fazer corresponder, a cada tipo de enunciado, não só a atitude que se está querendo suscitar no aluno, como também o comportamento esperado do professor que propõe cada exercício, visto que é a ele que o trabalho se dirige.

Assim: - Se pretendemos do aluno que ele aprenda, adquira conhecimentos, serão propostos EXERCÍCIOS DE EXPOSIÇÃO e o professor deverá ao transmitir os conhecimentos, expor incompletamente, para deixar que o aluno "aprenda" os detalhes e os casos especiais com o exercício.

**Exemplo 1)** (Sobre o assunto "Fatoração de um trinômio biquadrado)

a) Fatore os trinômios biquadrados  $x^4 + x^2 + 1$  e  $x^4 + 1$ , fazendo aparecer diferenças de quadrados.

b) Para fatorar um trinômio da forma  $x^4 + px^2 + q$  (onde p e q são números reais), podemos distinguir dois casos.

1º) se  $p^2 - 4q \geq 0$ , pode-se utilizar a mudança de variável, fazendo  $y = x^2$

2º) se  $p^2 - 4q < 0$ , demonstra-se que se pode escrever este trinômio na forma  $(x^2 + a)^2 - b^2x^2$  onde a e b são números reais a determinar.

c) Aplique estes métodos para fatorar os seguintes trinômios biquadrados:

$$\begin{array}{ccc} x^4 - 13x^2 + 36 & 9x^4 - 6x^2 + 1 & x^4 + 2x^2 - 15 \\ 4x^4 - 17x^2 + 4 & 3x^4 - 16x^2 + 5 & x^4 + 2x^2 + 9 \end{array}$$

Se pretendemos do aluno que se envolva na procura, na investigação das soluções até encontrar a mais elegante, adequada, econômica, etc., devem-se propor EXERCÍCIOS DE PESQUISA e ao professor caberá suscitar curiosidades e encorajar a perseverança na procura.

**Exemplo 2)** Um urso desloca-se 1000m para o sul, depois 1000m para o oeste, depois 1000m para o norte e chega ao mesmo ponto de onde partiu. De que cor é o urso? Como você chegou a esta conclusão?

OBS.: É a este tipo de exercício que o artigo chama de PROBLEMA. Compare com os "problemas em aberto" de Butts.

Se pretendemos do aluno que treine para adquirir mecanismos, serão propostos EXERCÍCIOS DIDÁTICOS e a preocupação do professor estará voltada para fixar conhecimentos, aptidões, hábitos.

**Exemplo 3)** Listas de divisões a efetuar, comuns nos livros de exercícios das primeiras séries do 1º grau. Começam por cálculos envolvendo os "fatos fundamentais" mais fáceis (1, 2 ou 5), para introduzir progressivamente outros números. Só mais tarde aparecem os zeros intercalados no quociente e divisões tais como 20929:299 que acumulam grandes dificuldades para um estudante de 10 anos.

OBS.: Compare com os "exercícios algorítmicos" de Butts.

Se pretendemos do aluno que ele assuma suas responsabilidades para conduzir um trabalho a um bom termo, empenhando-se para não deixar subsistirem erros, é recomendável sugerir a EXECUÇÃO DE TAREFAS TÉCNICAS e o professor deverá iniciar ao esmero e exigir um trabalho bem feito.

**Exemplo 4)** Calcular o produto do número  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  por todos os seus conjugados (isto é,  $1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ )

OBS.: Se o aluno se lembrar de usar a identidade  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  ele simplificará substancialmente sua tarefa, que ainda assim lhe tomará cerca de uns 20 minutos. Do contrário, levará mais ou menos 2 horas.

Se pretendemos do aluno que transfira conhecimentos teóricos para um contexto prático, serão propostos EXEMPLOS DE ILUSTRAÇÃO ou EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO e a preocupação do professor será relacionar o abstrato a outros centros de interesse.

**Exemplo 5)** Do cruzamento de um coelho albino com uma coelha chinchila (filha de coelha albina com coelho chinchila) qual é a probabilidade de nascerem coelhos albinos?

(O caráter chinchila é dominante sobre albino)

(O caráter albino é sempre recessivo)

OBS.: Compare com os "problemas de aplicação" de Butts. Se pretendemos do aluno que se detenha e seja atencioso em

observar, experimentar e trabalhar, deve-se dar-lhe oportunidades de fazer MANIPULAÇÕES e o professor estará preocupado em motivar os resultados de um estudo abstrato ulterior.

**Exemplo 6)** Para uma posterior demonstração das fórmulas de cálculo de áreas de figuras planas, pode-se envolver primeiramente os alunos em trabalhos de decomposição das figuras por recortes e "recomposição" em seguida, formando figuras conhecidas, deixando que a curiosidade e a experiência ajudem a conduzi-los intuitivamente à idéia que será mais tarde deduzida.

Se pretendemos que o aluno verifique o valor de seus conhecimentos, fazendo valer suas aptidões, deve-se aplicar um tipo especial de exercícios apropriados para TESTES, COMPOSIÇÕES, EXAMES, CONCURSOS e caberá ao professor controlar os resultados do ensino ministrado sobre cada aluno.

Tal classificação não pretende ser, no entanto, nem exaustiva, nem disjuntiva, mas enfatiza a necessidade de uma pedagogia própria a cada categoria. Isso nos leva a formular uma outra pergunta: como trabalhar com o problema na situação de ensino?

## 6. Como trabalhar com o problema?

### 6.1 A colocação do problema

Ao lidar com problemas, uma questão que imediatamente vem à tona é a da formulação dos enunciados.

Uma idéia matemática pode fornecer exercícios cujas finalidades sejam inteiramente diferentes. As atitudes diversas do aluno e do professor correspondem enunciados com finalidades distintas. O professor que proporá os exercícios deverá ser capaz de elaborar tais enunciados conforme seus objetivos e, muitas vezes, transpor um enunciado de uma categoria para outra. No entanto, os princípios sob os quais se redigem os enunciados são variados, tantas vezes opostos, ainda que sobre um mesmo tema. (IREM, 1976)

Para Butts (BURIASCO, 1984), uma das principais preocupações daquele que elabora o enunciado de um problema é torná-lo o mais interessante possível de modo a maximizar a motivação do resolvidor em potencial. Ele enumera algumas sugestões específicas para certos tipos de problemas e outras aplicáveis a diversos casos:

- Aos EXERCÍCIOS DE RECONHECIMENTO, que no mais das vezes se limitam a questões de múltipla escolha, ele acrescenta questões abertas, do tipo "Dê um exemplo de...", que dão oportunidade à criatividade dos alunos; a probabilidade de discussões em sala sobre uma gama de exemplos, os mais diversificados, aumenta consideravelmente.

- Tornar os EXERCÍCIOS ALGORÍTMICOS mais interessantes é, sem dúvida, um desafio. Duas sugestões são oferecidas: dar uma seqüência de exercícios com o mesmo propósito, e dar o reverso de problemas familiares.

- Os PROBLEMAS DE APLICAÇÃO apresentam maiores possibilidades para o professor usar a sua criatividade. No entanto, há que se preservar da artificialidade comum a esses problemas tal como se apresentam na maioria dos livros didáticos de que dispomos. É aconselhável que se observem critérios tais como: trazer dados reais, tanto no tipo de informações conhecidas quanto nos valores numéricos, de modo tal que o "desconhecido" no problema seja desconhecido na realidade; e que a resposta ao problema seja algo que possa ter, para alguém uma razoável razão de busca.

- Na resolução de problemas da vida diária, é crucial a habilidade para discernir os dados necessários dos supérfluos, as informações coerentes e as inconciliáveis. Assim, a colocação de problemas contendo dados insuficientes ou estranhos demandam

uma análise crítica que poderá ser muitíssimo fértil.

- Há lugar ainda para traços de humor ou referências que envolvam emotivamente o resolvidor de problemas; pode-se apelar até mesmo para o absurdo, para uma formulação que torne o problema tão irreal que o faça curioso. (BURIASCO, 1984)

Sem dúvida, as sugestões apresentadas exigem do professor uma boa dose de criatividade e disposição, certa habilidade e recursos (tempo, material de consulta, etc.) e, principalmente, consciência de seus propósitos e confiança em seus métodos.

Outras considerações sobre a formulação dos enunciados são passíveis de longas sugestões das quais nos abstermos para focar a questão mais relacionada com a heurística, que são os métodos de resolução.

### 6.2 O método de resolver o problema

"Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

(...)

O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante." (POLYA, 1978, p. 1)

Com este trecho, POLYA inicia a primeira parte de seu livro, no qual se preocupará em coligar e agrupar indagações e sugestões típicas, úteis para discutir os problemas com os alunos, e em selecioná-las e dispô-las cuidadosamente numa lista, na ordem em que é mais provável que ocorram (igualmente útil àqueles que procurem resolver problemas por si próprios). A familiarização com tal lista levar-nos-ia a perceber, por detrás das sugestões, as ações requeridas, e a concluir que a lista enumera, indiretamente, as operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas. Assim POLYA introduz suas considerações sobre os "procedimentos heurísticos" típicos para a resolução de problemas. SCHOENFELD usará "Heurística" para significar uma sugestão ou estratégia geral independente de qualquer tópico ou assunto particular, que auxilie o resolvidor de problemas a aproximar e compreender um problema e eficientemente guiar seus recursos para resolvê-los. (SCHOENFELD, 1980)

Basicamente, o processo de resolução de um problema envolve quatro fases, a saber: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, sua execução e o retrospecto. Quando no processo de resolução, pode ser que não seja tão nítida a distinção entre cada uma dessas fases, mas a passagem por todas elas revela a importância de cada uma.

Por exemplo: pode ser que percamos horas, dispendendo esforços vão em cálculos e traçados de figuras, quando a eles nos atiramos afoitamente, sem ter sequer compreendido o problema. Em geral, é inútil deter-nos nos detalhes, sem perceber a conexão principal ou sem ter feito alguma espécie de plano. Por sua vez, muitos enganos podem ser evitados se, na execução de nosso plano, nos preocupamos em verificar cada passo. Por fim, muitos dos melhores resultados e efeitos poderão ficar perdidos se deixarmos de reexaminar e reconsiderar a solução completa.

A "lista" de POLYA enumera as "heurísticas" sugeridas para as diversas fases, as quais são comentadas mais detalhadamente

no seu "Pequeno Dicionário de Heurística", que compõe o corpo do livro (1978). Não reproduziremos aqui tal relação mas citaremos algumas das sugestões, entre as propostas por ele, e as destacadas por SCHOENFELD (1980), que nos chamaram mais atenção, quer pela frequência com que produzem bons resultados, quer pela simplificação que, em geral, imprimem ao trabalho, quer pelo redimensionamento que podem proporcionar ao problema, abrindo-o a abordagens absolutamente novas:

1. utilizar recursos de invariância;
2. desenhar um diagrama;
3. reformular o problema.

1. Utilizar argumentos de invariância. Em minha própria experiência, vejo revelar-se a frequência de seu aproveitamento. Se o enunciado é invariante para uma certa transformação, o mesmo ocorrerá com a resposta. Assim, é lícito, por exemplo, valer-se da simetria do enunciado ao elaborar seu plano de resolução, ou de testes dimensionais na verificação de cada passo e da resposta a que se chega.

2. Desenhar um diagrama. É de grande valor para a simplificação do problema. A visualização da situação, expressa numa forma mais direta, facilita a percepção simultânea das diversas variáveis envolvidas. "Vendo-o" assim, podemos ter do problema uma idéia mais abrangente. Por outro lado, os detalhes também são preservados quando desenhados no papel, de tal maneira que, quando a ele voltamos, lembramos as informações anteriores. Com isso poupamos tempo e trabalho. O diagrama muitas vezes poderá revelar um aspecto diferente do problema e levar-nos a conceber estratégias de ataque mais eficazes. (POLYA, 1978)

3. Reformular o problema. Encanta-me. Parece-me que é a chave que libera a criatividade, pois que tende a provocar a ruptura, a nova concepção. Pode-se reformular o problema por uma mudança de perspectiva ou de notação; pode-se ainda assumir uma solução para determinar as propriedades que deve ter; argumentar pela contradição também é reformular o problema. (SCHOENFELD, 1980)

### 7. Os estudos sobre resolução de problemas e a "idéia brilhante"

Muitos têm-se dedicado ao estudo dos métodos de resolução de problemas, motivados pelos mais diversos interesses, publicando trabalhos dirigidos a variados tipos de leitores, com enfoques por vezes contrastantes e ênfase nos mais diferentes aspectos.

A psicologia, desde o século passado, vem pesquisando experimentalmente a questão da resolução de problemas pelo ser humano.

Não nos deteremos aqui em explicar as posições assumidas pelos adeptos das várias teorias (Teoria das Provas e Erros, Gestalt, etc). Focalizaremos nossa atenção num ponto sobre o qual, a despeito do desenvolvimento das pesquisas e análises, muito pouco se tem a dizer de definitivo: o aparecimento da "idéia brilhante", o "insight", o "clie" - uma experiência que todos já viveram, mas que é tão difícil descrever e cujo controle é ainda hoje um enigma. (POLYA, 1978, PUCKIN, 1969)

A "caixa preta", que é a gênese da "idéia brilhante", nos leva a considerar o papel do pensamento intuitivo na resolução de problemas, quer sejam matemáticos, quer envolvam situações outras da vida de cada um.

Ainda no século XVII, os filósofos racionalistas Descartes, Spinoza e Leibnitz estudaram alguns componentes do pensamento criador. As teses desses filósofos, no que tange à intuição, revelam-se interessantes para a apreensão da especificidade da atividade

de heurística. Mostraram eles que na composição da atividade intelectual humana existem verdades que são descobertas pelo intelecto, não à base de argumentação lógica e raciocínio, mas através de uma peculiar e súbita visão intelectual. Os filósofos racionalistas, apologistas do raciocínio analítico, não só reconheciam o fato da concepção intuitiva do real, mas também a consideravam uma forma superior de concepção: "No ato da intuição, a mente raciocina e contempla simultaneamente." (PUCKIN, 1969)

Pesquisadores contemporâneos têm posto em destaque a urgência da descoberta daquilo que fundamenta o pensamento intuitivo, bem como da estrutura lógica do raciocínio. Procuram os elementos que o compõem, não passíveis de redução à prova e que constituem importante elo da atividade heurística.

BRUNER (1968) quis caracterizar o raciocínio intuitivo contrapondo-o ao raciocínio analítico, que se caracteriza pelo fato de serem suas etapas isoladas, nitidamente concebidas e objetivadas pelo homem, podendo ser expressas por meio de palavras. Em geral, o homem tem plena consciência, tanto do conteúdo como do desenrolar do pensamento. Neste caso, o raciocínio pode ser resumido à forma de reflexões harmônicas, partindo do geral para o particular, ou então à forma de análises sucessivas, vindo do particular para o geral.

Já no raciocínio intuitivo, inexistem etapas nitidamente determinadas. A principal tendência do raciocínio intuitivo é a percepção concisa do problema global. O homem chega à resposta que procura sem ter consciência do processo pelo qual ela foi atingida. Além disso, nesse caso, a própria matéria do problema vai sendo refletida inconscientemente. O raciocínio é feito através de saltos, rápidas mutações, sem que se possam distinguir os elos isolados.

Pergunta-se então: "O emprego de determinados procedimentos heurísticos poderá exercer alguma ação positiva no desenvolvimento do raciocínio intuitivo?"

Segundo BRUNER, um processo heurístico é, essencialmente, um método não rigoroso de conseguir soluções para problemas. Embora o processo heurístico muitas vezes leve à solução, não oferece garantia alguma de fazê-lo. Um algoritmo, este sim, é um processo de resolver um problema que garante, se o seguirmos com exatidão, encontrarmos, ao fim de um número limitado de etapas, a solução, desde que ela exista. Muitas vezes, quando não se conhece nenhum processo algorítmico, pode-se utilizar um processo heurístico; essa é uma de suas vantagens. Ainda mais, mesmo quando se dispõe de um algoritmo, processos heurísticos podem ser muito mais rápidos. (BRUNER, 1968)

O ensino de certos processos heurísticos facilitará o pensamento intuitivo? Por exemplo, dever-se-á ensinar explicitamente aos alunos: "Quando você não conseguir descobrir como proceder com um problema, procure pensar num problema mais simples semelhante a ele; a seguir, empregue o método para a resolução do problema mais simples para o plano de solução do problema mais complicado."? Ou deverá o aluno ser levado a aprender tal técnica sem que a exponhamos, verbalmente, desse modo?

É possível que o velho provérbio da lagarta que não conseguia andar quando tentava explicar como o fazia tenha aplicação nesse caso. O aluno que se torna obsessivamente consciente das regras heurísticas de que se utiliza para fazer suas arremetidas intuitivas, poderá reduzir esse processo a um método analítico. Por outro lado, é difícil acreditar que as regras heurísticas gerais - o uso da analogia, o recurso à simetria, o exame de condições-limite, a visualização da solução - quando empregadas frequentemente, não sirvam como apoio e suporte ao pensamento intuitivo. (BRUNER, 1968)

O que mais terá influência sobre o pensamento intuitivo? Parece provável que o pensamento intuitivo eficiente seja fortalecido pelo desenvolvimento da auto-confiança e da coragem do aluno. Uma pessoa que pensa intuitivamente pode muitas vezes atingir soluções corretas, mas também incorre em erros, constatados quando ela mesma ou outros fazem uma verificação. Tal tipo de pensamento exige, por isso mesmo, um certo despojamento para permitir-se a si mesmo cometer enganos honestos na tentativa de resolver problemas. Alguém que seja inseguro, que careça de confiança em si mesmo, provavelmente não estará disposto a correr tais riscos. (BRUNER, 1968)

Com essas premissas, poder-se-ia indagar se o atual sistema de recompensas e punições, como ainda vigora na maior parte de nossas escolas, não tenderia a inibir o emprego do pensamento intuitivo.

Numa cultura como a nossa - onde existe uma pressão tão grande no sentido da uniformidade do gosto em nossos meios de comunicação de massa, tão grande temor em relação aos estilos excêntricos, e também, na verdade, uma certa suspeição sobre a própria idéia de estilo - nutrir a intuição confiante torna-se algo de grande importância para que a pessoa encontre os seus caminhos. Aqui, a resolução de problemas poderá ter um papel especial a desempenhar.

#### 8. A matemática é só "resolver problemas"?

Não havia intenção de, neste texto, discorrer longa ou profundamente a respeito da essência da atividade matemática. Mas ocorreu-me que mais um trabalho como este - que de certa forma reflete a insistência da preocupação com as relações entre resolução de problemas e ensino da Matemática, a evidência da reciprocidade e das múltiplas possibilidades das contribuições de uma ao outro, a diversidade e frequência das experiências de exploração das oportunidades que se oferecem mutuamente - pode ter levantado elementos que venham reforçar a impressão ou a convicção que muita gente tem de que o "fazer Matemática" se confunde com o "resolver problemas".

Tal "identificação" tem impregnado o ensino de Matemática,

reduzindo o aprender Matemática à mera aquisição de técnicas e treinamento de procedimentos - na melhor das hipóteses, heurísticos, mas, no mais das vezes, simplesmente algorítmicos -, negando ao aluno o conhecimento e a experiência de outras possibilidades da atividade matemática, tão férteis do ponto de vista da produção matemática, quanto das contribuições para a educação, entendida num sentido amplo.

Por isso, resolvi encerrar este artigo, transcrevendo um trecho de uma entrevista que o matemático Michael Atiyah concedeu a Robert Minio, em que ele fala de outras possibilidades da atividade matemática; neste caso, no seu jeito de fazer Matemática:

"Uma pessoa pode de repente dizer:

- Quero resolver este problema e depois ela mesma se interroga:

- *Como resolvo este problema?*

*Eu não faço assim.*

*Navego em águas matemáticas,*

*refletindo sobre as coisas, curioso,*

*conversando com uns e outros,*

*remexendo idéias.*

*e assim as coisas surgem*

*e eu as persigo.*

Às vezes, vejo algo que tem conexões

com outras coisas que conheço,

e eu junto as idéias

e os resultados vão aparecendo.

Nunca praticamente comecei um trabalho

sabendo antes o que queria fazer

e conhecendo para onde ele iria me conduzir.

Interessa-me a Matemática;

eu converso, eu aprendo, discuto

e assim as perguntas vão surgindo.

Nunca comecei com um fim predeterminado,

que não fosse o da compreensão da matemática."

(ATIYAH, 1985)

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATIYAH, Michael. Por que fazer Matemática. **Matemática Universitária**, Brasília, n. 2, p. 2-19, Dez. 1985. (entrevista)

BRUNER, Jerome S. **O processo da educação**. São Paulo: Companhia Nacional, 1968.

BURIASCO, Regina. Thomas Butts: Colocando problemas adequadamente. In: Seminário sobre Resolução de problemas e ensino da Matemática, apresentado à Disciplina Aprendizagem Matemática. Rio Claro: UNESP. Mestrado em Educação Matemática, 1984.

FREUDENTHAL, Hans. Re-invention. In: - **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel, 1973. p. 109-129.

GAZIRE, Eliane S. **O ensino e a resolução de problemas**. Palestra proferida aos alunos da disciplina Prática de Ensino de Matemática. Belo Horizonte: Faculdade de Educação - UFMG: julho, 1987.

\_\_\_\_\_. **Resolução de problemas: perspectivas em educação**

matemática. UNESP, Rio Claro, 1988. Dissertação (Mestrado). Rio Claro: UNESP, 1988.

GLAESER, G. **Mathematiques, pour l'élève professeur**. Hermann, 1971.

HOLANDA, Aurelio B. **Novo dicionário Aurélio**. 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES - IREM, Strasbourg. **Le livre du problème**. 12. ed. Paris: Cedic, 1976.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PUCKIN, V. N. **Heurística: a ciência do pensamento criador**. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

SCHOENFELD, Alan H. Heuristics in the classroom. In: **NCTM. Problem solving in school mathematics; 1980 Yearbook**. Virginia: Association Drive, Reston, 1980. p. 9-22.