AS QUATRO OPERAÇÕES COM FRAÇÕES SÃO FÁCEIS?

Carlos Afonso Rego*

INTRODUÇÃO

Não são poucas as professoras das séries iniciais do 1º grau que se queixam das dificuldades presentes na sala de aula quando o tema é frações.

Essas dificuldades aparecem na compreensão do conceito (divisão da unidade em partes iguais), no uso da simbologia (notação), na compreensão e utilização das operações, na resolução de problemas "práticos".

Metodologicamente, o que se faz usualmente é apresentar o conceito, dar alguns exemplos e, a seguir, propor exercícios de fixação.

A utilização de material concreto, quando se dá, não passa de mera manipulação de objetos, pouco ajudando na compreensão do conceito, e quase sempre inibindo a descoberta.

O trabalho do aluno é memorizar e manipular regras complicadas, sem compreendê-las. Se isso já é, sem dúvida, uma tarefa bastante desagradável, mesmo para adultos, dificilmente uma criança apreciará fazê-la.

Pretendo, aqui, apresentar algumas sugestões que poderão tornar o estudo do tema mais agradável, atraente e eficaz.

Usando uma linguagem bastante informal, indo do mais simples ao mais elaborado, propondo problemas antes de apresentar os resultados, trataremos das quatro operações com frações (números racionais), procurando entender sua evolução histórica, o porquê das regras operatórias e como levar os alunos a compreendê-las naturalmente.

O método da redescoberta, que, em síntese, consiste em criar condições adequadas para que o aluno, resolvendo problemas e respondendo perguntas convenientes, descubra e construa ele mesmo os resultados desejados, norteia o desenvolvimento deste trabalho.

As referências históricas dão a exata noção das dificuldades encontradas no passado e do trabalho que foi necessário para superá-las, além de sugerir como a matemática foi e é construída socialmente.

Vale registrar que não é de todo surpreendente que os alunos sintam dificuldades com as frações. Na evolução do conhecimento, os números fracionários, com suas regras, aparecem tardiamente. Os nossos alunos refazem esse caminho histórico em um intervalo de tempo muitíssimo menor.

No que se segue, estaremos admitindo que conceitos introdutórios tais como fração, numerador, denominador, equivalência e outros já tenham sido tratados na classe.

A ADIÇÃO

Num curso de atualização para professores de 1º grau dado na UFMG, quando tratamos desse tema, surgiu a seguinte pergunta: "Por que se tem de tirar o mínimo múltiplo comum (MMC) para somar duas frações de denominadores diferentes?".

As respostas apresentadas podem ser resumidas numa só: "PORQUE A REGRA MANDA"!

Pois bem, mas quem fez a regra deve ter tido uma boa razão para fazê-la, e é isso que vamos procurar descobrir.

O que diz a regra?

Dadas as frações a/b e c/d, a, b, c, e d inteiros, com b e d diferentes de zero:

$$a/b + c/d = (ad + cd)/bd \qquad [1]$$

Não é uma regra simples, convenhamos. Nem muito "natural". Não seria mais simples se a soma fosse uma fração cujo numerador fosse a soma dos numeradores, e o denominador a soma dos denominadores? Assim:

$$a/b + c/d = (a + c)/(b + d) \qquad [2]$$

* Professor do Departamento de Matemática da UFMG

Educ. Rev., Belo Horizonte (4):30-32, dez. 1986.

Acontece que a matemática é uma forma de conhecer, interpretar e descrever a realidade, e, se assim é, a regra 2 proposta não é boa, já que, por ela, teríamos o seguinte: 1/2 + 1/2 = (1 + 1)/(2 + 2) = 2/4 = 1/2, o que qualquer criança verifica que não é verdade juntando as duas metades de uma mesma laranja, por exemplo.

Com o auxílio de material concreto, e depois de alguns exemplos, os alunos orientados pela professora e "induzidos" pela realidade, **DESCOBRIRÃO** que:

1/3 + 1/3 = 2/3; 1/5 + 1/5 = 2/5; 1/4 + 1/4 = 2/4.

Notar que as parcelas são frações de mesmo denominador e numerador um.

Bastará um pequeno esforço adicional para se conseguir deles a regra:

"Para se somar frações de mesmo denominador e numeradores um, basta repetir o denominador e somar os numeradores".

O fato descoberto coincide com a História. Essas frações de numerador um e mesmo denominador foram as primeiras que o Homem aprendeu a somar.

O passo seguinte será desenvolver o mesmo trabalho com frações que tenham mesmo denominador e numeradores diferentes.

Assim, 2/5 + 1/5, 1/4 + 2/4, 3/7 + 2/7, 3/8 + 2/8 são alguns exemplos que levarão os alunos a **descobrir** que: "Para se somar frações de mesmo denominador e numeradores diferentes, basta repetir o denominador e somar os numeradores".

Estimulado e gratificado por essas descobertas, o aluno se sentirá mais à vontade para enfrentar um novo desafio: **descobrir** como se somam frações de denominadores diferentes.

Deve-se formular perguntas que levem o aluno a buscar as frações equivalentes àquelas dadas, pois assim procedendo, ele encontrará, no conjunto das equivalentes, frações de mesmo denominador, com as quais ele já sabe trabalhar. Com isso, estaremos reduzindo o novo problema a um problema já conhecido, ou seja, a soma de frações de mesmo denominador. Depois de alguns exemplos, ele não terá dificuldades em estabelecer a nova regra.

É bom notar que não é necessário tirar o MMC dos denominadores para somar duas frações. Qualquer múltiplo comum dos denominadores serve. O MMC só é conveniente para simplificar os cálculos, portanto, não se deve falar dele senão depois dos alunos trabalharem bastante com exercícios mais simples.

Olhando para o exemplo:

1/4 + 3/8 = (8 x 1 + 4 x 3)/(4 x 8) = 20/32,

notamos o uso da regra [1] aplicada às frações 1/4 e 3/8.

O interessante desse procedimento é que ele contém, essencialmente, o método de resolver situações novas usando o que já se conhece de situações semelhantes, porém mais simples. Além da satisfação da descoberta, o aluno começa a perceber que a matemática pode ser construída usando-se a observação e o raciocínio, e que suas leis não surgem por um passe de mágica.

Há, entretanto, uma razão mais forte ainda para explicar a regra [1].

O conjunto dos números fracionários (racionais) surgiu da necessidade de se ampliar o conjunto dos números inteiros, visto este não ser suficiente para resolver todos os problemas práticos existentes.

Vejamos o seguinte exemplo:

Se no dia 3/maio/86, 10 cruzados valiam 131,51 cruzeiros, quantos cruzeiros valia, naquele dia, 1 cruzado? A equação para o problema é: 10 Cz$ = 131,51 Cr$, logo 1 Cz$ = 13.151/10 Cr$. Se existissem só os inteiros, esse problema não teria solução.

Problemas dessa natureza já traziam dores de cabeça aos comerciantes do século XIII, qu tinham que trabalhar com moedas de países diferentes, porque, naquela época ainda não se entendia muito bem como fazer cálculos com os números fracionários.

O conjunto dos números fracionários contém os inteiros como frações particulares, isto é, um inteiro é uma fração particular. Assim, a/b, b diferente de zero, é um inteiro, se b = 1.

É desejável que a regra para se obter a soma de duas frações mantenha o resultado e as propriedades da mesma operação, se eles forem inteiros, pois do contrário tudo o que sabíamos fazer com eles teria de ser modificado.

Ora, vejamos o que acontece se adicionarmos os inteiros 2/1 a 5/1, segundo a regra 2 :

2/1 + 5/1 = (2 + 5)/(1 + 1) = 7/2. Mas, 2/1 = 2 e 5/1 = 5 e 2 + 5 = 7!

Logo, a regra [2] não serve para somar as frações particulares de denominador um, já que o resultado por ela obtido não coincide com a adição dos inteiros 2 e 5, por exemplo. Deve-se notar que usando a regra [1] obtém-se exatamente 7/1 = 7.

É razoável perguntar se a única maneira de somar racionais para se manter a soma quando eles são inteiros é a regra [1]. A resposta é sim. Em certos textos avançados de álgebra, isso é demonstrado.

Saliente-se que se levou muito tempo e foi necessário muito trabalho, de várias pessoas, para se descobrir que a regra [1] era a conveniente. Na verdade, ela só foi proposta e aceita como tal por volta do século XIX, depois das publicações do matemático PEANO.

A SUBTRAÇÃO

Esta operação, como qualquer outra, aparece da necessidade de resolver problemas.

Um exemplo: Antônio comeu metade de um bolo e Bernardo comeu 1/3 do mesmo bolo. Que fração de bolo Antônio comeu a mais que Bernardo?

Para resolvê-lo, lembremos que, nos inteiros, a diferença A - B era o número inteiro C, se a soma B + C = A. É de se esperar que com os racionais o mesmo se dê.

De fato, no nosso problema, o número procurado é 1/6, porque 1/6 + 1/3 = 1/2.

Outra vez, estamos resolvendo um problema novo usando o que já aprendemos anteriormente. Quando escrevemos 1/2 - 1/3 = ? estamos perguntando: "que número deve ser somado à 1/3 para obtermos como resultado 1/2?". Isso significa que, para definirmos a diferença (1/6), usamos a adição (1/6 + 1/3 = 1/2).

Depois de resolver vários problemas com o uso de material concreto e de muitos exemplos numéricos, e de se caminhar passo a passo, como na adição, os alunos, com uma pequena ajuda, poderão concluir que:

a/b - c/d = (ad - bc)/bd, porque (ad - bc)/bd + c/d = a/b.

A MULTIPLICAÇÃO

Deve-se iniciar este estudo propondo alguns problemas que levem o aluno a somar duas, três, ou quatro frações iguais.

Depois de alguns exemplos, tais como:

1/3 + 1/3 = 2/3, 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5 , 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4,

pode-se levá-los a concluir que: 2 x 1/3 = 1/3 + 1/3 = 2/3, 3 x 1/5 = 3/5, ou seja, "para se multiplicar um número inteiro n por uma fração, basta multiplicar seu numerador pelo inteiro n".

O passo seguinte pode ser dado com a ajuda das seguintes perguntas: qual é o quádruplo de 2? O triplo de 5? O dobro de 3? A metade de 8? Um terço de 6? Um quarto de 12?

Fica claro, depois disso, o significado da palavra **de** nas expressões acima como sendo: 4 x 2, 3 x 5, 2 x 3, 1/2 x 8, 1/3 x 6, 1/4 x 12, ou seja, o **de** significa multiplicação.

A etapa seguinte consiste em propor mais alguns pares de problemas, tais como: qual é

a1) metade da metade de 8?	a2) um quarto de 8?
b1) metade de um terço de 12?	b2) um sexto de 12?
c1) um quarto da metade de 16?	c2) um oitavo de 16?
d1) um quarto de um terço de 12?	d2) um doze avos de 12?

A comparação dos pares de respostas (a1, a2), (b1, b2), (c1, c2), (d1, d2) permitirá aos alunos a seguinte descoberta:

1/2 x 1/2 = 1/4, 1/2 x 1/3 = 1/6, 1/4 x 1/2 = 1/8, 1/4 x 1/3 = 1/12.

Notar que todos esses problemas podem ser resolvidos depois do manuseio de material concreto.

Estabelecer a regra: "o numerador do produto é o produto dos numeradores e o denominador do produto é o produto dos denominadores", para os exemplos acima, será um passo esperado e natural por parte dos alunos.

Problemas do tipo:

dois terços de dois quintos de 15 (2/3 x 2/5 x 15), devidamente explorados, servirão de guia para concluir a regra:

a/b x c/d = (a x c)/(b x d) [3]

Vale repetir que, em particular para os inteiros a e b, temos:

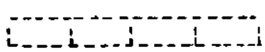
a/1 x b/1 = (a x b)/1 x 1 = (a x b)/1 = a x b, isto é, a regra [3] mantém o que já conhecíamos da multiplicação de inteiros.

A DIVISÃO

Seguindo o mesmo método, o caminho é ir apresentando problemas que possam ser resolvidos experimentalmente, com o uso de material concreto.

Exemplo: tomando-se uma ficha de cartolina que esteja previamente marcada e dividida em um número qualquer de partes iguais, digamos quatro, conforme a figura abaixo, não será difícil obter dos alunos solução para o problema:

"Quantos" 1/4 de ficha tem uma ficha?



Variando o número de divisões e formulando os problemas adequados, os alunos não terão dificuldades em concluir que:

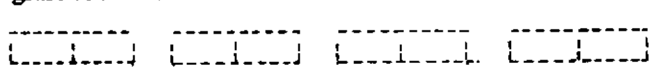
"UM dividido pela fração 1/n, n diferente de zero, é igual a n, ou seja:

1: (1/n) = n [4]

Usando-se duas, três, . . ., m fichas, cada uma delas dividida em n partes iguais, pode-se levar os alunos à seguinte conclusão:

m : (1/n) = m x n [5]

O problema: "quantos 1/2 litros há em 3 litros?" pode ser resolvido com o auxílio de três fichas divididas em metades, como na figura abaixo, e ilustra o que foi dito no parágrafo anterior.



Insistindo mais ou menos, dependendo do nível de adiantamento da turma, é de se esperar que ela consiga estabelecer que:

"Para se dividir um número inteiro m por uma fração 1/n, n diferente de zero, basta multiplicar o inteiro m por n (que é a fração 1/n invertida)".

Até aqui, parece que tudo vai bem. Mas ainda falta o caso mais geral, isto é:

para a, b, c, d números inteiros, com b e d diferentes de zero,

(a/b) : (c/d) = (a/b) x (d/c) [6]

Na página 41 do número 3 da REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RPM), editada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), há um artigo da prof.ª Manhúcia P. Liberman, de S. Paulo, desenvolvendo alguns exemplos ilustrativos para a regra [6]. Concordo, porém, com a opinião lá expressa de que para alunos das séries iniciais, aqueles exemplos não são muito esclarecedores.

A meu ver, deve-se apelar para a experiência adquirida na subtração. Lá definimos a diferença entre a/b e c/d como sendo a fração que somada a c/d dava a/b, ou seja, definimos a subtração usando a adição.

Aqui, (a/b):(c/d) é a fração y, se y x (c/d) = a/b, ou , dito de outra forma, o quociente da divisão de a/b por c/d é y, se y x (c/d) é a/b.

Usando-se as propriedades da multiplicação, chega-se ao número y. Vejamos um exemplo:

Para dividirmos 2/3 por 5/7, devemos procurar a fração y que multiplicada por 5/7 dá 2/3, isto é, queremos um y tal que:

y x (5/7) = 2/3 [7]

As propriedades da multiplicação me autorizam a multiplicar ambos os membros de [7] por um mesmo número diferente de zero, mantendo-se a igualdade. Queremos que o "y" fique isolado no primeiro membro e, para isso, devemos descobrir a fração conveniente para transformar y x (5/7) em y x 1, porque y x 1 = y. Esta fração será o fator que aparecerá em ambos os membros da igualdade. Com algumas tentativas logo se chega a 7/5.

Assim, teremos:

y x (7/5) x (5/7) = (2/3) x (7/5), donde:

y x 1 = (2/3) x (7/5), donde:

y = (2/3) x (7/5) = 14/15.

Conclusão: (2/3) : (5/7) é 14/15, porque 14/15 é a fração que multiplicada por 5/7 dá 2/3.

Devo admitir que a "concretização" de tal problema não é muito fácil (mas não é impossível). Mas a evolução do conhecimento exige esforços, sendo a passagem do concreto para o abstrato um deles.

CONCLUSÃO

É natural que os alunos apresentem dificuldades no estudo dos números racionais, uma vez que a própria História mostra como a evolução desse conceito foi longa e difícil. O uso adequado do método da redescoberta pode ser uma maneira de suavizar o trabalho, permitindo que eles, não só sejam capazes de fazer cálculos com esses números, como , também, de **compreender** o porquê deles serem feitos daquela forma.

A bibliografia abaixo é sugerida para os interessados em conhecer um pouco mais sobre o assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. Benjamin; *História da matemática.* s. 1. E. Blucher, 1974.

BRUMFIEL, C. F. et alii. *Conceitos fundamentais de matemática.* s.1., Ao Livro Técnico, 1972.