v. 32, n. 3, p. 896–932, 2024
ISSN: 2237-2083 · DOI: 10.17851/2237-2083.32.3.896–932
Submetido em: 29/01/2024 · Aprovado em: 02/12/2024

REVISTA DE ESTUDOS DA LINGUAGEM

Demostración matemática: género discursivo y conexiones lógicas desde una mirada lingüística

Mathematical Proof: Discourse Genre and Logical Connexions from a Linguistic Perspective

Natalia Leiva Salum
Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC) | Santiago | CL
naleiva@uc.cl
https://orcid.org/0009-0008-2538-7236

Margarita Vidal Lizama
Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC) | Santiago | CL
mvvidal@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-2161-8956

Resumen: Una de las principales tareas que enfrentan quienes estudian Cálculo, Álgebra o Geometría en la formación terciaria es escribir lo que se conoce como una 'demostración matemática'. El propósito de una demostración es probar que una afirmación inicial es verdadera mediante un razonamiento deductivo que alterna el simbolismo matemático con el lenguaje natural. Más allá de encontrar el camino para resolver el problema, la escritura de este tipo de discurso multisemiótico encierra dificultades particulares; una de ellas es establecer relaciones lógicas, a través del lenguaje natural, que den sentido a las ecuaciones. El objetivo del presente estudio es ofrecer una descripción inicial de la demostración como género discursivo y los patrones de conexión que son relevantes en este. A partir de un trabajo interdisciplinario entre lingüistas y matemáticos, se caracterizó un conjunto de demostraciones confeccionadas por docentes de Licenciatura en Matemáticas de una universidad chilena. Dicha caracterización se fundamenta en el marco de la Lingüística Sistémico Funcional, particularmente en las descripciones de la semántica discursiva ideacional, conexión en español y el discurso matemático. Se plantea que la demostración posee tres etapas: Punto de la demostración ^ Razonamiento matemático ^ Confirmación. A su vez, se muestra que la demostración, al igual que géneros de otras disciplinas, despliega predominantemente conexiones causales externas realizadas congruente e incongruentemente y conexiones comparativas internas, realizadas congruentemente. Se concluye que la conexión en las demostraciones resulta crucial para formular ideacionalmente las proposiciones y para hilar las distintas etapas del género.

Palabras clave: Matemáticas; género; relaciones lógicas; conexión; Lingüística sistémico funcional.

Abstract: One of the main tasks faced by those studying Calculus, Algebra or Geometry at tertiary level is writing the text known as 'mathematical proof'. The purpose of a proof is to prove that an initial statement is true by deductive reasoning, through the alternation of mathematical symbolism and natural language. Beyond the solving of the problem itself, writing this kind of multisemiotic discourse involves particular difficulties; one of them is to establish logical relationships, through natural language, that make sense of relations along the proof. The aim of this study is to offer an initial description of the proof as a genre as well as of the patterns of connexion that are relevant to it. Based on an interdisciplinary work between linguists and mathematicians, a set of proofs constructed by Mathematics professors at a Chilean university are described. This characterization is grounded on Systemic Functional Linguistics, with focus on ideational discourse semantics, connexion in Spanish and mathematical discourse. The paper proposes three stages for the proof: Point of the proof ^ Mathematical reasoning ^ Confirmation. The paper also shows that mathematical proof, like genres from other disciplines, displays predominantly external causal connexions realised congruently and incongruently, and internal connexions realised congruently. The analysis shows that connexions are crucial for the ideational formulation of propositions and for threading together the different stages of the mathematical proof genre.

Keywords: Mathematics; genre; logical relations; connexion; Systemic functional linguistics.

1 Introducción

La formación especializada en las disciplinas implica aprender no solo un cierto conocimiento, sino también una forma de crear y reproducir este conocimiento a través del lenguaje. Esta manera de entender la relación entre lenguaje y conocimiento puede aplicarse a todas las disciplinas, incluyendo aquellas que constituyen el dominio de las ciencias básicas**.** En este ámbito, generalmente la creación y transmisión de conocimiento se lleva a cabo a través de la integración de la semiosis verbal y otros sistemas semióticos, como representaciones visuales o lenguaje simbólico. Un caso interesante es el de las matemáticas, en el que una gran parte la construcción de conocimiento especializado pareciera asentarse en la interacción entre el simbolismo matemático – como una forma de semiosis – y el lenguaje natural. La integración de la semiosis verbal y el simbolismo matemático puede implicar un desafío importante en la formación de nuevos especialistas en el área, quienes tienen que enfrentarse a recursos semióticos complejos que realizan nuevos géneros, propios de la disciplina.

Desde hace ya varias décadas, existe un conjunto relevante de estudios, particularmente en inglés, que han abordado la matemática en su vínculo con el lenguaje y el aprendizaje. Estos estudios han apuntado a la estrecha relación entre habilidades lingüísticas y logro en matemáticas, indicando que el desarrollo de los conocimientos matemáticos depende en gran medida del desarrollo de una conciencia lingüística sobre cómo funciona el lenguaje en esta práctica. Esta orientación ha fundamentado investigaciones tanto en los niveles de formación escolar (Adams, 2003; Pimm, 1987) como en los años iniciales de formación universitaria (Cocking; Mestre, 1988). En los trabajos mencionados se observa una amplia conciencia sobre la circulación de diferentes textos en el ámbito de esta práctica, tales como las presentaciones del profesor, las explicaciones de los textos, los problemas y los exámenes.

Uno de los textos más relevantes de la práctica de las matemáticas en los primeros años de formación especializada es la resolución de problemas, también conocida como 'demostración matemática'. Una demostración matemática, desde una mirada disciplinar, puede ser descrita en términos generales como la prueba de un conocimiento matemático. Esta prueba involucra un punto de partida establecido *a priori*, a partir del cual se desarrolla un proceso de deducción lógica que culmina en la comprobación (o no) del conocimiento en cuestión (Alfaro-Carvajal *et al*, 2019; Alvarado & González, 2009; Bustos & Zubieta, 2019; Fiallo *et al*, 2013; Martínez, 2022). Si bien la demostración matemática ha sido foco de múltiples estudios, no pareciera existir una definición compartida ni una caracterización común de este género por parte de los especialistas de la disciplina (Fiallo *et al*, 2013; Lew; Mejía-Ramos, 2020); más aún, se identifican en la literatura diversos sentidos, categorías, funciones y contextos de uso atribuidos a la demostración matemática (Alfaro-Carvajal *et al*, 2019). Por otra parte, desde una mirada centrada en la enseñanza, manuales (e.g. Sundstrom, 2021) o apuntes no publicados escritos por matemáticos (e.g. Allahbakhshi *et al*, 2022; Wilson, s/a) ofrecen orientaciones para la escritura de demostraciones que sugieren algunos de sus posibles rasgos lingüísticos, como una evidente organización lógica, el uso de términos y conceptos técnicos, mediante lenguaje natural y lenguaje matemático, y la definición de símbolos y notación utilizados en el transcurso de la demostración (Lew & Mejía-Ramos, 2020).

Un cuerpo importante de investigación sobre la demostración matemática se desarrolla en el ámbito de la enseñanza de las ciencias, generalmente en el contexto de educación secundaria. En este ámbito se observa un interés sostenido por identificar las dificultades que enfrentan las y los matemáticos en formación en el aprendizaje de la demostración, así como por presentar estrategias didácticas que los apoyen en el proceso de aprendizaje (Bustos & Zubieta, 2019; Camacho *et al*, 2014; Martínez, 2001; Sua Flores, 2019). Las investigaciones señalan como dificultades aspectos diversos, entre los que se cuentan la complejidad de poner en práctica el razonamiento lógico adecuado para el desarrollo de una demostración y el uso inadecuado de casos para ejemplificar axiomas (Alvarado & González, 2009; Camacho *et al*, 2014; Fiallo *et al*, 2013). Otro conjunto de investigaciones vincula la demostración matemática con la práctica de la argumentación, considerando generalmente el modelo argumentativo de Toulmin (e.g. Katz *et al*, 2023; Urhan & Zengin, 2024).

En la investigación de orientación lingüística, es posible identificar algunos estudios que abordan la matemática para describir sus rasgos característicos. En inglés, por ejemplo, se identifica el trabajo de Spanos *et al* (1988), quienes describen los rasgos lingüísticos que se ponen en juego en la resolución de problemas matemáticos en la escuela, en los niveles sintáctico, semántico y pragmático, señalando su alto grado de sofisticación. Según estos autores, entre los rasgos de nivel sintáctico que caracterizan el registro matemático y que pueden ser desafiantes para los aprendientes, destacan el uso de conectores lógicos (e.g. *if…then; given that…*). Más recientemente, Lew y Mejía-Ramos (2020) describen algunas convenciones lingüísticas para la escritura de demostraciones matemáticas en el ámbito de educación terciaria, teniendo en cuenta diferentes contextos de uso (textos de estudio, demostraciones producidas por estudiantes, demostraciones producidas por profesores en la pizarra). Si bien esta investigación plantea la relevancia de entender la demostración como un género disciplinar propio de las matemáticas, integrando una mirada sobre el lenguaje natural, su descripción emerge de las representaciones de los docentes sobre 'infracciones' (*breaches*) o errores en el proceso de su escritura, y no de la descripción de patrones lingüísticos en este género.

Un conjunto de investigaciones que ha abordado el discurso de la matemática desde una mirada lingüística se fundamenta en la Lingüística sistémico-funcional (LSF). En este dominio, el trabajo fundacional y más extenso sobre la matemática es el de O'Halloran (1999; 2005), quien la ha explorado como un discurso esencialmente multisemiótico, asumiendo una mirada gramatical hacia las imágenes visuales y el simbolismo en las matemáticas. Otros trabajos desde la LSF se han enfocado en los desafíos pedagógicos del discurso matemático a nivel escolar para, a partir de esto, proponer estrategias que apoyen el aprendizaje de la matemática en los estudiantes (Accurso *et al*, 2017; O'Halloran, 2015; Schleppegrell, 2007; Segerby, 2017). Más recientemente, algunas investigaciones han abordado la matemática y su rol en la física, particularmente en manuales de nivel secundario en inglés. Estos estudios describen la organización textual en el lenguaje matemático, tal y como se despliega en géneros propios de la física (Doran, 2018a, b), reflexionando sobre la dimensión semiótica del lenguaje matemático (Doran, 2022). La aproximación al discurso de la matemática desde esta perspectiva ha considerado fundamentalmente textos que circulan en la educación secundaria. Estos estudios han contribuido descripciones relevantes sobre el discurso matemático en inglés desde una mirada sistémico funcional.

Considerando los estudios hasta ahora revisados, es posible señalar que la investigación lingüística sobre el discurso matemático se ha desarrollado en particular en el contexto de habla inglesa, mientras que en español este objeto se ha abordado casi exclusivamente desde el ámbito de la enseñanza de las ciencias. Teniendo en cuenta la aparente ausencia de estudios lingüísticos sobre el discurso matemático, este artículo plantea dos objetivos generales. Primero, ofrecer una descripción inicial de la demostración matemática como un género relevante del discurso matemático, desde una mirada lingüística especializada, que complemente las propuestas disponibles desde la didáctica de la matemática. Segundo, describir las relaciones lógicas que permiten elaborar el razonamiento deductivo en este género en español. En este sentido, el artículo contribuye una descripción lingüística de este objeto, que no ha sido abordado hasta ahora desde esta perspectiva. El foco en las relaciones lógicas en la demostración responde a la importancia del razonamiento lógico en el despliegue de este género, cuestión que se evidencia en un número importante de investigaciones sobre este objeto (e.g. Schleppegrell, 2007; Sundstrom, 2021; Lew & Mejía-Ramos, 2020; Martínez, 2022, entre otros). Para abordar la exploración del género demostración matemática y de las relaciones lógicas en él, este estudio se fundamenta en la Lingüística sistémico funcional (Halliday & Matthiessen, 2014; Martin, 1992). Esta aproximación a la demostración matemática busca contribuir conocimiento lingüístico relevante que pueda ser aplicado en la formación de las y los estudiantes en matemáticas, para quienes la escritura de la demostración es un importante desafío.

El artículo se organiza de la siguiente forma. Se introducen a continuación los fundamentos teóricos sobre los que se sustenta el estudio de la demostración matemática, teniendo en cuenta principios generales de teoría sistémica, la perspectiva teórico-metodológica asumida en esta descripción y los sistemas de significados relevantes para ella. Luego, se describen los aspectos metodológicos del estudio, con foco en los procedimientos analíticos. A continuación, se presentan los resultados, que inician con una descripción de la estructura esquemática propuesta para el género demostración matemática, para introducir luego los patrones de CONEXIÓN observados en los datos. Finalmente, se proponen las conclusiones más relevantes del trabajo y se señalan algunas proyecciones para el estudio de la demostración matemática en el ámbito de educación terciaria.

2 Fundamentos teóricos

En esta sección se presentan los fundamentos en que se basa el estudio propuesto. Específicamente, se abordan los principios generales de la teoría sistémica (2.1), con énfasis en aquellos conceptos relevantes que permiten describir la perspectiva trinocular asumida en este estudio. A continuación, se profundiza en el estrato del registro, particularmente en la variable campo, y se presentan las opciones de significado ideacional clave en el estrato semántico-discursivo (2.2). Luego, se introducen los sistemas de CONEXIÓN (2.3) y de PERIODICIDAD (2.4).

2.1 Aproximación teórica. Principios generales de teoría sistémica

La Lingüística sistémico funcional (en adelante, LSF) es una teoría general sobre el lenguaje. En esta teoría, se entiende el lenguaje como una herramienta para crear significados en la vida social (Halliday & Matthiessen, 2014), es decir, como un sistema semiótico que funciona siempre en relación con el contexto. En este marco, el contexto se conceptualiza como un sistema semiótico más abstracto que el lenguaje. En la propuesta de contexto de Martin (1992) aquí asumida, se identifican dos niveles diferentes en el contexto, género y registro. El género ha sido definido, desde un enfoque pedagógico, como un proceso social orientado a un propósito y dividido en etapas (Martin & Rose, 2008). Desde una perspectiva que enfatiza la dimensión lingüística, género se entiende como una configuración recurrente de significados textuales, ideacionales e interpersonales, orientada a lograr un propósito cultural determinado (Martin & Rose, 2007). Estas configuraciones de significado están organizadas en etapas, que contribuyen a lograr el propósito global del género. Por ejemplo, el género 'narración' se organiza en las siguientes etapas:

Orientación ^ Complicación ^ Resolución (^ Coda)

La secuencialidad de cada una de las etapas se señaliza por el símbolo ^ que aparece entre cada una de ellas. El nombre de cada etapa se escribe con mayúscula inicial, debido a que se trata de una función en términos sistémicos. Las etapas que no están entre paréntesis corresponden a etapas obligatorias en la estructura esquemática, mientras que las etapas opcionales se escriben entre paréntesis.

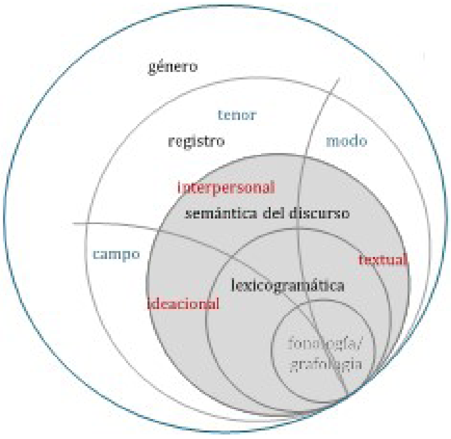
El siguiente nivel del contexto, denominado registro, distingue las dimensiones del contexto inmediato de un texto que influyen en los patrones de significado que lo constituyen. Estas dimensiones corresponden a las variables de campo, tenor y modo. Por ejemplo, en una narración el campo suele ser del ámbito del sentido común, el tenor suele implicar una relación de relativa cercanía entre los hablantes y el modo suele ser monologal, tanto oral como escrito (Eggins, 2004). La conceptualización del contexto, en la LSF, es fundamental, en la medida que guía la interpretación de los fenómenos lingüísticos estudiados.

La arquitectura teórica de la LSF se organiza alrededor de un conjunto de principios teóricos generales. En esta investigación, tres de estos principios son clave para fundamentar la aproximación a las relaciones lógicas en la demostración matemática: estratificación, realización y metafunción. El principio de **estratificación** permite identificar niveles o estratos tanto en el contexto como en el lenguaje. En este último se distinguen tres estratos diferentes: fonológico-grafológico, léxico-gramatical y semántico-discursivo (Halliday & Matthiessen, 2014). En la LSF, se entiende que entre los estratos del lenguaje y el contexto se establece una relación de **realización**, tal como entre el contexto y el lenguaje: los significados en el nivel superior son codificados o simbolizados por los significados del nivel inferior (Martin & Rose, 2007). Así, los significados semántico-discursivos son realizados a través de patrones léxico-gramaticales, tal y como estos últimos son realizados por patrones fonológicos-grafológicos.

El principio **metafuncional** supone que el lenguaje cumple tres grandes funciones en la vida social: construir la experiencia interna y externa a través de la semiosis; establecer relaciones sociales entre los usuarios del lenguaje en diversos contextos; y organizar estos recursos de significado en la forma de textos coherentes. Estas funciones, denominadas metafunciones, son la metafunción ideacional, la metafunción interpersonal y la metafunción textual, respectivamente. El modelo de contexto propuesto en el marco de la LSF asume de manera general que estas metafunciones se proyectan en el nivel del registro, de modo que cada una de ellas se relaciona con una de las variables registrales: la metafunción ideacional se relaciona con la variable de campo, la metafunción textual con la variable de modo y la metafunción interpersonal con el tenor (Halliday & Matthiessen, 2014; Martin, 1992).

La Figura 1 representa estos tres principios centrales en la LSF. Los diferentes estratos en el lenguaje y el contexto se representan en círculos concéntricos; la relación de realización es representada mediante una línea recta que atraviesa los estratos y las metafunciones se proyectan sobre el lenguaje y el registro en el contexto.

Figura 1 – Principios teóricos en LSF



Fuente: adaptado de Martin & Rose (2008, p.17)

Esta conceptualización teórica sobre el lenguaje permite abordar el estudio de los fenómenos lingüísticos desde una mirada teórico-metodológica que se ha denominado **trinocular** (Halliday & Matthiessen, 2014). La perspectiva trinocular se sustenta en los principios de estratificación, realización y metafunción descritos previamente, y supone explorar un fenómeno a partir de tres puntos de vista complementarios, de manera simultánea: 'por arriba', es decir, considerando el estrato superior al estrato en que se identifica el fenómeno; 'por alrededor', es decir considerando patrones de significado complementarios en el mismo estrato; y 'por abajo', es decir, teniendo en cuenta la realización del significado en el estrato inmediatamente inferior (Halliday & Matthiessen, 2014). Esta aproximación ha sido aplicada al estudio de diversos fenómenos lingüísticos, en diferentes estratos del lenguaje (e.g. Hao, 2020; Quiroz & Martin, 2021). De esta manera, para el estudio de la CONEXIÓN en las demostraciones matemáticas, la mirada trinocular implica considerar, 'por arriba', el nivel del registro; 'por alrededor', otros tipos de significados en el nivel semántico-discursivo y, 'por abajo', las realizaciones léxico-gramaticales en español. Esta perspectiva permite proveer una descripción detallada y teóricamente sustentada de la CONEXIÓN en las demostraciones matemáticas.

2.2 La perspectiva trinocular: del registro a la semántica-discursiva

Dentro del marco de la LSF, el punto de entrada más productivo para el estudio del lenguaje disciplinar suele ser la metafunción ideacional. Mirado 'por arriba', esto implica considerar la variable campo en el registro. El **campo** se entiende en términos técnicos como un recurso semiótico para la construcción de la experiencia desde una perspectiva estática o dinámica (Doran & Martin, 2021). Mientras la perspectiva estática implica un foco en los **ítemes** y sus relaciones, la perspectiva dinámica implica un foco en las **actividades**. Martin (2020) establece una distinción entre **actividad** (unmomented activity) y **serie de actividades** (momented activity)[1].

En el estrato semántico-discursivo, la unidad que realiza una actividad del campo es la **figura**. Una figura se entiende como una configuración semántico-discursiva de un estado o una ocurrencia. Esta configuración se organiza alrededor de una entidad o dos entidades relacionadas, en el caso de las figuras de estado, y de una ocurrencia, en el caso de las figuras de ocurrencia[2]. En el estrato léxico-gramatical, la unidad que realiza la figura, de manera natural o congruente[3], es la cláusula. Las Tablas 1 y 2 a continuación introducen ejemplos de figuras de estado y de figura de ocurrencia, respectivamente, con su realización congruente en la léxico-gramática.

Tabla 1 – Figura de estado: 'Tres es un número primo'

semántica-discursiva	figura de estado		
	entidad	=	**entidad**
	Tres	es	un número primo
léxico- Gramática	Participante grupo nominal	Proceso grupo verbal	Participante grupo nominal
	cláusula		

Fuente: elaboración propia

Tabla 2 – Figura de ocurrencia: 'Los estudiantes aprendieron sobre los números primos en la escuela'

semántica-discursiva	figura de ocurrencia			
	entidad	**ocurrencia**	**entidad**	**entidad**
	Los estudiantes	aprendieron	sobre los números primos	en la escuela
léxico-gramática	Participante grupo nominal	Proceso grupo verbal	Participante frase preposicional	Circunstancia frase preposicional
	cláusula			

Fuente: elaboración propia

[1] Seguimos aquí la traducción ofrecida en Leiva (2022)

[2] Para ver una explicación detallada de la estructura orbital de las figuras, ver Hao (2020).

[3] La gramática que se encuentra en una relación natural o directa con la semántica se conoce como 'congruente' (Halliday 1994): los procesos son realizados como grupos verbales, los participantes como grupos nominales, la circunstancias como adverbios o grupos preposicionales, las cualidades como adjetivos y las conexiones como conectores.

Dos o más figuras pueden conectarse en una **secuencia**, lo que se realiza congruentemente en un **complejo clausular** en el estrato léxico-gramatical. 'Por arriba', una secuencia de figuras realiza una serie de actividades en el campo. Las correlaciones no marcadas entre unidades ideacionales en la léxico-gramática, la semántica-discursiva y el registro se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3 – Correlaciones ideacionales no marcadas

registro	semántica-discursiva	léxico-gramática
serie de actividades	secuencia	complejo clausular
actividad	figura	cláusula
ítem	entidad	grupo nominal

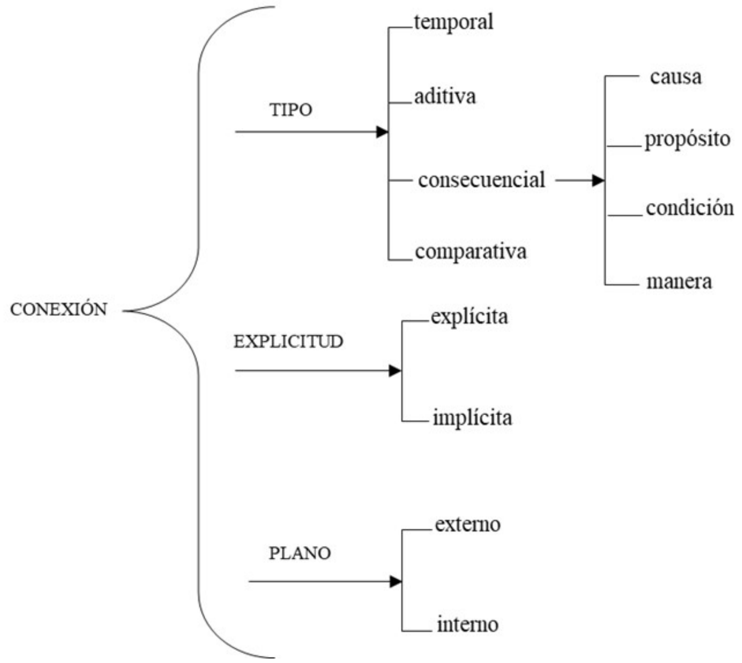
Fuente: Martin, 2020.

Desde un punto de vista semántico-discursivo, los significados que funcionan para establecer relaciones lógicas entre figuras, es decir, para formar secuencias, se organizan en el sistema de CONEXIÓN, que se presenta a continuación.

2.3 Sistema de CONEXIÓN

El sistema de CONEXIÓN (Martin, 1992; Hao, 2020) organiza los significados ideacionales de naturaleza lógica en el estrato semántico-discursivo. Estos significados funcionan para relacionar o conectar sucesos o estados que se construyen como figuras. Los significados lógicos se realizan de manera prototípica como conectores. En el marco de la LSF, el sistema de CONEXIÓN es modelado como una red compuesta por tres sistemas de opciones que funcionan de manera simultánea, como se ilustra en la Figura 2.

Figura 2 – Sistema de CONEXIÓN



Fuente: Hao, 2020; Martin, 1992

Uno de estos sistemas organiza las opciones relativas al tipo de conexión, correspondientes, en un primer nivel de delicadeza, a conexiones temporales, aditivas, consecuenciales y comparativas. Un segundo sistema distingue entre conexión explícita y conexión implícita, es decir, realizada o no por un ítem léxico. Por último, un tercer sistema distingue el plano de la conexión, es decir, entre conexión externa y conexión interna. La primera está orientada a la representación experiencial del significado en el texto y, por tanto, al despliegue de actividades en el campo; la segunda está orientada a la organización retórica del texto y, por lo tanto, al género (Halliday & Hasan, 1976; Martin, 1992, p. 180).

Los criterios para distinguir entre conexión externa e interna no han sido extensamente elaborados en la propuesta de Martin (1992). Sin embargo, se proponen ciertas consideraciones respecto de la conexión interna que ayudan a distinguirla de la externa. Por un lado, desde un punto de vista textual, la conexión interna tiende a ser cohesiva, i.e. a funcionar entre complejos clausulares o segmentos mayores de texto (Martin, 1992; Martin & Rose, 2007). Por otro lado, desde una mirada léxico-gramatical, es posible parafrasear una conexión interna como una conexión externa añadiendo además un proceso verbal o mental que proyecte una de las figuras conectadas; de esta manera se modifica además la taxis del complejo clausular, es decir, de no-hipotáctica a hipotáctica o viceversa (Hao, 2020, p. 111; Martin, 1992, p. 226).

Al igual como otros significados semántico-discursivos, la conexión puede realizarse de manera congruente o incongruente en la léxico-gramática. Una realización congruente se da cuando los significados discursivos se relacionan de manera natural o directa con su realización en la léxico-gramática: las ocurrencias son realizadas como Procesos, las entidades como Participantes, Cualidades y/o Circunstancias, y las conexiones como conectores (Hao, 2020; cf. Halliday & Martin, 1993). De este modo, la realización congruente de una secuencia de figuras es en general un complejo clausular, como se señaló más arriba. Un ejemplo de realización congruente de secuencia, con las figuras realizadas por cláusulas y la conexión realizada por un conector, se presenta a continuación:

Tabla 4 – Realización congruente de una secuencia de figuras

semántica-discursiva	secuencia		
	figura	conexión	figura
	Margarita estaba preocupada	YA QUE	su itinerario cambió
léxico-gramática	cláusula	conector	cláusula
	complejo clausular		

Fuente: elaboración propia

Además de su realización congruente, una secuencia puede realizarse de manera incongruente o metafórica a través de una cláusula. Esto implica que la conexión lógica es realizada por una estructura diferente de la prototípica, como un grupo verbal, un grupo nominal, un adjetivo o una frase preposicional (Coffin, 2004; Martin, 2004). Se ha descrito que esta realización incongruente implica una tensión entre el estrato de la léxico-gramática y la semántica-discursiva (Halliday & Mathiessen, 2014; Martin, 2020). Para que una secuencia se realice metafóricamente en una cláusula es necesario que al menos una de las figuras que la compone se realice en el rango del grupo o la frase (Martin, 1992, pp. 169-170), es decir, que sea ella misma una realización metafórica o incongruente de una figura. Un ejemplo de realización incongruente de secuencia se presenta a continuación:

Tabla 5 –Realización incongruente de secuencia mediante nominalizaciones

semántica-discursiva	secuencia		
	figura	conexión	figura
	El cambio en su itinerario	PRODUJO	la preocupación de Margarita
léxico-gramática	cláusula		

Fuente: elaboración propia

En la Tabla 5, ambas figuras son realizadas en el rango del grupo mediante nominalizaciones ('preocupación' y 'cambio'), las que son conectadas mediante el grupo verbal 'produjo'. Si bien la forma canónica de realizar metafóricamente una figura es la nominalización (Martin, 1993), también puede producirse mediante una referencia textual o una cláusula incrustada (Christie & Derewianka, 2008, p. 26; Halliday & Matthiessen, 2014, p. 717; Hao, 2020, p. 125; Martin, 1992, p. 140). La Tabla 5 a continuación muestra una secuencia cuya primera figura es realizada en el rango del grupo, mediante el ítem de referencia textual 'esto'. Este demostrativo neutro tiene la capacidad de recuperar anafóricamente una figura introducida previamente en el discurso:

Tabla 6 – Realización incongruente de secuencia mediante referencia textual

semántica-discursiva	secuencia		
	figura	conexión	figura
	Esto	PRODUJO	la preocupación de Margarita
léxico-gramática	cláusula		

Fuente: elaboración propia

En la secuencia expuesta en la Tabla 7, la primera figura es realizada en el rango del grupo, mediante una cláusula incrustada, la que se indica con doble paréntesis cuadrados:

Tabla 7 – Realización incongruente de secuencia mediante cláusulas incrustadas

semántica-discursiva	secuencia		
	figura	conexión	figura
	[[Que el itinerario cambiara]]	PRODUJO	la preocupación de Margarita
léxico-gramática	cláusula		

Fuente: elaboración propia

El estudio de la CONEXIÓN en la demostración matemática es un aspecto central de este artículo. En el marco de la LSF, el trabajo más relevante a la fecha sobre significados lógicos en matemáticas es el de O'Halloran (2005). La autora propone que en las matemáticas las conexiones se realizan tanto en el simbolismo matemático como en el lenguaje; las conexiones lingüísticas, plantea, suelen funcionar más en la organización retórica del texto (plano interno) que en la construcción de la experiencia (plano externo). Sin embargo, su descripción no ofrece criterios explícitos para distinguir entre estos dos planos ni presenta un análisis que diferencie unidades en los estratos léxico-gramatical y semántico-discursivo.

2.4 Sistema de PERIODICIDAD, una mirada 'por alrededor'

La perspectiva trinocular que fundamenta esta exploración considera 'por alrededor' significados textuales en el estrato semántico-discursivo. En particular, el estudio de los recursos de CONEXIÓN se complementa con una consideración del despliegue de recursos textuales propios del sistema de PERIODICIDAD (Martin & Rose, 2007). Este sistema aborda los significados textuales que permiten organizar el texto como un cúmulo de información. Se distinguen dos puntos de prominencia posibles en el texto, una prominencia temática – que ancla un punto de partida para un cúmulo de información – y una prominencia informativa –que presenta aquellos significados propuestos como lo 'nuevo'. Estos dos puntos de prominencia pueden observarse en distintos niveles.

A nivel de sección o párrafo de un texto, los dos puntos de prominencia se denominan hiperTema e hiperNuevo. Se reconocen como hiperTema los significados ideacionales e interpersonales que predicen la información desplegada en un párrafo y que aparecen en posición inicial de este, generalmente en lo que se conoce como oración tópico. En tanto, el hiperNuevo corresponde a significados ubicados en posición final, orientados a acumular la información desplegada en la sección o párrafo del texto (Martin 1992; Martin & Rose, 2007). Los hiperTemas suelen presentarse en los textos de manera más recurrente que los hiperNuevos, es decir, los textos suelen más recurrentemente predecir que consolidar información. Esta organización periódica de la información en los textos no ocurre de forma natural, sino que depende de los recursos que pueda desplegar el hablante para organizar la información en el texto. En otras palabras, no todos los textos ni todos los párrafos de un texto se organizan necesariamente a partir de hiperTemas e hiperNuevos. El siguiente fragmento ejemplifica la predicción de información en un párrafo mediante un hiperTema, destacado en negrita:

> **El día viernes se llevó a cabo el Festival escolar de Matemáticas**. Tras una larga organización, profesores de toda la comuna dieron inicio al evento que busca familiarizar a los estudiantes con esta temida asignatura. Los estudiantes aprendieron sobre los números primos, ejercitaron operaciones básicas y tuvieron sus primeros acercamientos a las ecuaciones. El festival concluyó con una competencia de cálculo mental, tras la cual se premió a los estudiantes ganadores.

Los momentos de predicción (i.e. Temas) y de acumulación de información (i.e. Nuevos) pueden identificarse por dos patrones clave. Desde un punto de vista ideacional, en estos momentos se introducen entidades de carácter más general que luego se elaboran en el desarrollo informativo. Desde un punto de vista interpersonal, se tienden a negociar patrones de valoración de manera explícita. Estos patrones ofrecen criterios para determinar la presencia de estos puntos de predicción y acumulación de la información en el despliegue textual.

La cláusula también puede entenderse, desde una mirada textual, como un cúmulo de información en el que se distribuyen la prominencia temática y la prominencia informativa. En este nivel, estas se denominan Tema y Nuevo, respectivamente. En términos generales, se ha identificado como el Tema de la cláusula en inglés todos los elementos que anteceden al Proceso, mientras que el Nuevo se ha descrito como todos los elementos que lo suceden (Halliday & Matthiessen, 2014). Se distinguen, además, diferentes tipos de Tema en la cláusula, dependiendo del tipo de significado que se realiza: Tema textual, Tema interpersonal, Tema tópico marcado y Tema típico no marcado[4]. Las opciones de Tema y Nuevo se ilustran en la Tabla 7, exceptuando el Tema interpersonal, debido a que el componente de significado interpersonal ha sido señalado como poco relevante en el discurso de las matemáticas (Doran, 2020). Se ejemplifican en la Tabla 8 dos opciones de distribución de la información en la cláusula, de modo de sugerir las diferentes posibilidades de organización de la información.

Tabla 8 – Ejemplos: análisis de Tema y Nuevo en la cláusula

Tema textual	Tema tópico marcado	Tema tópico no marcado	Proceso	Nuevo
De esta manera,	durante este año	los estudiantes	aprendieron	sobre los números primos.
		Los estudiantes	aprendieron	este año sobre los números primos.

Fuente: elaboración propia

Desde una perspectiva multisemiótica de la demostración matemática, Doran (2018b) y O'Halloran (2005) han propuesto métodos para el análisis del Tema en la simbología matemática, es decir, considerando la distribución de la información del lenguaje no verbal o simbólico. Sin embargo, en este estudio el análisis de la organización de la información en la demostración matemática se enfocará en las cláusulas, dentro de las cuales a menudo se inserta el simbolismo matemático. Por este motivo, se tendrá en cuenta los criterios generales de Moyano (2010; 2021) para el análisis de Tema y Nuevo en español. La autora propone que en esta lengua el Tema (no marcado) corresponde al participante que concuerda en persona y número con la desinencia del Proceso, mientras que el Tema marcado se realiza mediante elementos circunstanciales en posición inicial de cláusula y el Tema textual a través los elementos conectivos en posición inicial de cláusula.

En esta sección se han presentado los fundamentos teóricos a partir de los cuales se explora lingüísticamente la demostración matemática. Estos fundamentos informan los criterios y principios metodológicos del estudio, particularmente respecto del análisis de la demostración como un género y de las opciones de CONEXIÓN que en él se despliegan.

[4] Ver Halliday & Matthiesen (2014). 3.4 'Textual, interpersonal and topical Themes' (pp. 105-114).

3 Aspectos metodológicos

Esta investigación es un estudio de caso exploratorio de carácter descriptivo y cualitativo. El propósito es abordar de manera profunda, a partir de un análisis metafuncionalmente diferenciado y de la mirada trinocular de la LSF, la descripción del género y los patrones de CONEXIÓN en un grupo de instancias de la demostración matemática. A continuación, se detallan los datos seleccionados y los procedimientos de análisis empleados para plantear los resultados.

3.1 Datos

Los datos seleccionados para este estudio corresponden a 5 demostraciones matemáticas escritas por docentes del curso Taller de Matemáticas, de primer año del curriculum de Licenciatura en Matemáticas en una universidad tradicional de Chile. Estas demostraciones fueron escritas en el marco de un proceso de intervención para la integración de habilidades de comunicación escrita en el currículo de Matemáticas. Por ello, las demostraciones que componen el corpus de este estudio de casos fueron producidas con una finalidad pedagógica, que se orienta a modelar de manera explícita la escritura de la demostración matemática a los estudiantes. Estas demostraciones corresponden a lo que Lew & Mejía-Ramos (2020) caracterizan como "una demostración producida en el contexto de un manual para estudiantes", debido a su clara orientación a la enseñanza de la demostración como un género altamente especializado en la disciplina matemática. Estas demostraciones tienen una extensión y complejidad relativamente similar entre sí.

3.2 Procedimientos de análisis

En línea con los principios teóricos planteados por la LSF, un aspecto importante para la exploración de un significado es la consideración del contexto en el que funciona. En este sentido, el primer paso analítico de este estudio es la descripción lingüística del género. Para esta investigación, esto implica una descripción provisoria de la estructura esquemática de la demostración matemática. Para ello, se consideran fundamentalmente patrones de significado textual (PERIODICIDAD) e ideacional (FIGURA y CONEXIÓN). Los patrones de significado interpersonal se tienen en cuenta de manera selectiva y complementaria, en particular recursos de compromiso, que tienen alguna relevancia para los textos analizados.

Una vez identificada la estructura esquemática del género, el segundo paso analítico consiste en la identificación de secuencias en el estrato semántico-discursivo, lo que supone la determinación de figuras y conexiones que se establecen entre ellas. A la vez que se determinan las secuencias en el estrato semántico-discursivo, se identifican sus realizaciones léxico-gramaticales particulares. Este análisis permite revelar el potencial de diversificación gramatical de los significados semántico-discursivos de conexión en los datos analizados.

Dado que en las demostraciones se combina el lenguaje natural con el simbolismo matemático, es necesario clarificar cómo se entenderá en este artículo el simbolismo cuando se encuentra dentro de la estructura clausular del lenguaje natural. Expresiones de un símbolo, como '*x*' o '*y*', se consideran Participantes en el estrato léxico-gramatical y entidades en el estrato semántico-discursivo, dado que concuerdan con el Proceso de la cláusula. Por su parte, una ecuación como 'y=2m+1' es una expresión que relaciona diferentes elementos mediante uno o más relatores (en este caso, = y +). Así, puede entenderse como una figura de estado, dado que relaciona elementos. Sin embargo, cuando funciona dentro de la estructura clausular del lenguaje natural, la ecuación completa puede interpretarse como un Participante que es realizado por una expresión matemática que relaciona elementos, de modo similar a lo que ocurriría con una cláusula desplazada de rango. Esta interpretación se ejemplifica en la Tabla 9.

Tabla 9 –Lenguaje simbólico matemático y su interpretación lingüística

Participante ('grupo nominal')	Proceso	Participante ('cláusula desplazada de rango')
y	puede escribirse como	y=2m+1

Fuente: elaboración propia

Para considerar la diversificación gramatical (i.e. realizaciones congruentes e incongruentes), es necesario considerar tanto patrones semántico-discursivos como léxico-gramaticales. Para llevar a cabo esta distinción de manera sistemática se aplican al análisis los principios descriptivos de agnación y enación, originalmente propuestos por Gleason (1965). Dos realizaciones son consideradas agnados si involucran las mismas palabras y el mismo significado "nocional", pero tienen distintas estructuras (e.g. 'él la vio'; 'ella fue vista por él'). Dos realizaciones son consideradas enados si tienen la misma estructura, pero involucran diferentes palabras (e.g. 'él la vio'; 'él la escuchó'). El principio de agnación –y, por consecuencia, el de enación– ha sido empleado para la identificación de realizaciones metafóricas (Hao, 2020; Heyvaert, 2003; Leiva, 2022). En este estudio, el principio de agnación se aplica predominantemente a la identificación de secuencias realizadas metafóricamente.

4 Resultados

Esta sección ofrece, en primer lugar, una descripción provisoria del género demostración matemática, a partir del conjunto de datos disponibles para este estudio (4.1), y luego una descripción de los patrones de CONEXIÓN identificados en ellos (4.2). A lo largo de la sección se utilizarán *itálicas* para las fórmulas matemáticas y sus componentes, y VERSALITAS para señalar las conexiones.

4.1 Aproximación a la demostración matemática como un género

Desde la perspectiva de la LSF, se entiende que el propósito del género demostración matemática es proveer evidencia para un conocimiento matemático ya establecido, basándose en conocimiento previamente aceptado como verdadero y en procedimientos lógicos propios de la disciplina. Se propone que la estructura esquemática de este género se compone de tres etapas obligatorias:

Punto de la demostración ^ Razonamiento matemático ^ Confirmación

Esta estructura genérica se ejemplifica en la demostración matemática en la Tabla 10.

Tabla 10 – Estructura genérica de la demostración matemática

Etapa	Texto
Punto de la demostración	Supongamos que *x* e *y* son números impares. Demostremos que el producto *xy* es impar.
Razonamiento matemático	Como *x* es impar, sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$, para algún entero *n*. En forma similar, que y sea impar implica que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m. Se sigue que $xy = (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$.
Confirmación	Concluimos que *xy* puede escribirse como $xy = 2k + 1$, para un cierto entero *k*, a saber, $k=2nm+n+m$. Por lo tanto, *xy* es impar.

Fuente: elaboración propia

La primera etapa de la estructura esquemática de este género, **Punto de la demostración**, funciona para señalar la proposición matemática que será demostrada en el despliegue del texto. Para ello, se introducen los supuestos matemáticos que se toman como punto de partida y/o las condiciones que se considerarán para la demostración, y luego se presenta la proposición que debe demostrarse. En el ejemplo de la Tabla 9, el supuesto de entrada es la asunción de que '*x* e *y* son números impares', mientras que la proposición a demostrar se realiza en 'demostremos que el producto *xy* es impar'.

El ejemplo de la Tabla 9 presenta solamente una condición, lo que se relaciona con la orientación pedagógica de esta demostración y con el nivel de formación de los estudiantes a los que está dirigida. En otros casos, particularmente en demostraciones matemáticas solicitadas a estudiantes con una finalidad evaluativa, la etapa Punto de la demostración puede introducir más de una proposición que requiere ser confirmada. Cuando esto sucede, se produce una iteración secuencial de las etapas Razonamiento matemático y Confirmación. Un ejemplo de esta variación en el género se presenta en la Tabla 11. En este caso, la etapa Punto de la demostración es más compleja y se despliega a partir del enunciado de la tarea, expandiéndose hasta el inicio de la resolución.

Tabla 11 – Etapas iniciales de la demostración D2

Etapa	Texto
Punto de la demostración	Decimos que un número real es negativo si su inverso aditivo es positivo. Demuestre que el producto de un número positivo y uno negativo es un número negativo, y que el producto de dos números negativos es positivo. **Solución** Sean *a* un real positivo y *b* un real negativo cualesquiera. Por definición de número negativo, lo que se nos pide es demostrar que $-(a\ .\ b)$ es positivo.
Razonamiento matemático 1	Ahora bien, $-(a \cdot b) = (-1) \cdot (a \cdot b)$ (porque $(-1) \cdot x = -x$ para todo x) (1) $= (a \cdot b) \cdot (-1)$ (conmutatividad del producto) (2) $= a \cdot (b \cdot (-1))$ (asociatividad del producto) (3) $= a \cdot (-b)$ (conmutatividad y $(-1) \cdot x) -x)$ (4) Por definición de número negativo, $-b$ es positivo. Esto implica que $a \cdot (-b)$ es positivo por ser producto de números positivos (axioma de la clausura de los números positivos con respecto al producto).
Confirmación 1	Se demuestra así el resultado pedido
Razonamiento matemático 2	Si tanto a como b son negativos, entonces $(-a) \cdot (-b)$ es positivo por ser producto de números positivos. Por otro lado, $(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) = ((-1) \cdot (-1) \cdot (-1)) \cdot (a \cdot b) = 1 \cdot (ab) = ab$
Confirmación 2	Se concluye que ab es positivo, q.e.d[5].

Fuente: elaboración propia

La segunda etapa del género, **Razonamiento matemático**, tiene como objetivo desarrollar el proceso lógico-matemático mediante el cual se puede llegar al punto de la demostración enunciado en la primera etapa. La etapa Razonamiento matemático se despliega mediante secuencias de figuras que integran el lenguaje natural con el simbolismo matemático. La Tabla 12 presenta las secuencias – es decir, la configuración ideacional de figuras y conexiones – que se despliegan en la etapa Razonamiento matemático en la demostración D1, introducida previamente.

Tabla 12 – Secuencias de figuras en etapa Razonamiento matemático en D1

conexiones	figuras
COMO	*x* es impar
	sabemos que puede escribirse como *[[x = 2n +1]]*, para algún entero *n*.
EN FORMA SIMILAR,	que *y* sea impar
IMPLICA QUE	puede escribirse como *[[y = 2m + 1,]]* para algún entero *m*.
SE SIGUE QUE	xy = (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) +1.

Fuente: elaboración propia

[5] En la escritura de la demostración, esta sigla representa la cláusula 'queda entonces demostrado'

En este ejemplo en particular, se observa una configuración de significados ideacionales interesante, que muestra la interacción entre lenguaje matemático y simbólico en la etapa Razonamiento matemático: la ecuación '$x = 2n + 1$' aparece como una entidad dentro de una figura de ocurrencia, instanciada en lenguaje natural ('puede escribirse como $x=2n+1$').

Una característica distintiva de los patrones ideacionales en la etapa Razonamiento matemático es la complejidad de las secuencias que se despliegan en ella, lo que va asociado al uso de recursos de CONEXIÓN para el establecimiento de la relación entre figuras. Un ejemplo de secuencias con mayor complejidad en la etapa Razonamiento matemático se da en la demostración D2, presentada en la Tabla 13.

Tabla 13 – Secuencias de figuras en etapa Razonamiento matemático (1 y 2) en D2

conexiones	figuras
Razonamiento matemático 1	
POR	definición de número negativo,
	$-b$ es positivo.
	Esto
IMPLICA	que $a \cdot (-b)$ es positivo
POR	ser producto de números positivos
Razonamiento matemático 2	
SI	tanto a como b son negativos
ENTONCES	$(-a) \cdot (-b)$ es positivo
POR	ser producto de números positivos
POR OTRO LADO,	$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot \mathrm{a}) \cdot ((-1) \cdot b) = ((-1) \cdot (-1) \cdot (-1)) \cdot (a \cdot b) = 1 \cdot (ab) = ab$

Fuente: elaboración propia

Finalmente, la tercera etapa del género, **Confirmación,** funciona para establecer que la premisa inicial ha sido confirmada a través del razonamiento presentado. Esta etapa es la más breve en comparación con las dos anteriores. Desde un punto de vista textual, en esta etapa se recupera generalmente el punto de la demostración planteado en la etapa inicial del género. Un ejemplo de la etapa Confirmación se presenta en la Tabla 14.

Tabla 14 – Instancia de etapa Confirmación en D1

Etapa	Texto
Confirmación	CONCLUIMOS QUE xy puede escribirse como $xy = 2k + 1$, para un cierto entero k, a saber, $k=2nm+n+m$. POR LO TANTO, xy es impar

Fuente: elaboración propia

En este ejemplo, desde un punto de vista ideacional, la etapa Confirmación se instancia a partir de una figura de estado posicionada[6], relacionada de manera explícita con la etapa anterior mediante la conexión 'POR LO TANTO'. Esta etapa puede instanciarse también mediante otras configuraciones de significado ideacional, como a través de una figura de ocurrencia ('Se demuestra así el resultado pedido').

Otro ejemplo de etapa Confirmación se encuentra al final de la demostración D2 en la Tabla 15 a continuación:

Tabla 15– Instancia de etapa Confirmación en D2

Etapa	Texto
Confirmación	SE CONCLUYE QUE *ab* es positivo, q.e.d.

Fuente: elaboración propia

La descripción inicial del género demostración matemática aquí presentada permite aproximarse al estudio de la CONEXIÓN 'por arriba', teniendo en cuenta las motivaciones que provienen del estrato del género. Tal como se sugiere en esta descripción, las etapas Razonamiento matemático y Confirmación serían las dos más productivas para explorar la CONEXIÓN, teniendo en cuenta su función en la estructura esquemática del género.

4.2 La conexión en la demostración matemática

En esta sección, se presentan los resultados del análisis de los recursos de CONEXIÓN que se despliegan en las demostraciones matemáticas analizadas. Se considera aquí, en primer lugar, el tipo de conexión; luego, las opciones de realización congruente e incongruente, y, finalmente, las opciones en los planos externo e interno que se identifican en los datos. Se expondrán dos instancias como ejemplos para cada caso y luego se desplegará el análisis detallado de una de ellas, para profundizar en la configuración.

4.2.1 Tipos de significado en la conexión

En las demostraciones matemáticas analizadas aquí, el tipo de conexión más recurrente es el consecuencial. Este patrón es consistente con lo planteado tanto en la literatura matemática como en aproximaciones desde la didáctica de la matemática y la lingüística a los textos escritos en esta área (por ejemplo, Alfaro-Carvajal *et al*, 2019; Lew & Mejía-Ramos, 2020; O'Halloran, 2005)

[6] Desde un punto de vista ideacional, y según la propuesta de Hao (2020), las figuras pueden ser expandidas mediante varios recursos. Uno de ellos es la posición de figura, a partir de la cual los procesos verbales y mentales que proyectan una cláusula se interpretan en el estrato semántico-discursivo como recursos para posicionar una figura. En este sentido, no constituyen una figura en sí mismos, sino que la expanden. Desde una mirada interpersonal, la posición se asocia con el compromiso de heteroglosia (Martin & White, 2005), ya que reconoce la presencia de otras voces en el discurso.

Respecto de las conexiones de tipo consecuencial, se distinguen en los datos dos sub-tipos: conexión consecuencial causal y conexión consecuencial de condición. La primera establece una relación lógica en la que se introduce una condición necesaria para que un cierto efecto ocurra. El segundo tipo de conexión consecuencial señalado establece una relación entre un efecto y una condición bajo la cual este puede suceder (Martin, 1992; Martin & Rose, 2007). Las secuencias (1) y (2) presentan ejemplos de conexión consecuencial causal (en adelante, simplemente 'conexión causal') y conexión consecuencial de condición, respectivamente.

(1) COMO x es impar, sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$ (D1)

(2) si tanto *a* como *b* son negativos, ENTONCES $(-a) \cdot (-b)$ es positivo (D2)

Mirado desde el estrato semántico-discursivo, el ejemplo (1) introduce una secuencia en la que se despliegan dos figuras (señaladas con números romanos), que se relacionan entre sí mediante la conexión 'COMO':

COMO	(i)	*x* es impar
	(ii)	(sabemos que) puede escribirse como $x = 2n + 1$.

Por su significado, la conexión 'COMO' entre estas figuras establece a una de ellas como causa (*x* es impar) y a la otra como un efecto ('puede escribirse como $x = 2n + 1$'). La segunda figura de la secuencia presenta además una posición ('sabemos que'), que funciona para introducir la fuente de 'lo sabido' (Hao, 2020).

En el caso del ejemplo (2), la secuencia de figuras se constituye por medio de dos conectores:

SI	(i)	tanto *a* como *b* son negativos
ENTONCES	(ii)	$(-a) \cdot (-b)$ es positivo

La relación que las conexiones 'SI' y 'ENTONCES' establecen entre estas figuras posiciona a la figura (i) como causa y la figura (ii) como efecto.

Tanto el ejemplo (1) como (2) corresponden a realizaciones congruentes de la conexión. La realización congruente de este tipo de significado se profundiza en el siguiente apartado

4.2.2 Congruencia de la conexión

En los datos analizados, las conexiones causales en una secuencia pueden realizarse tanto de manera congruente como incongruente. La realización **congruente** de la conexión se ilustra en los ejemplos (1) y (2) presentados más arriba. En estos casos, las figuras que componen las secuencias son realizadas 'por abajo' por cláusulas (o complejos de cláusulas) y la conexión se realiza mediante un conector, tal como se muestra a continuación. Esta representación alternativa del ejemplo (1) busca identificar las unidades semántico-discursivas que constituyen esta secuencia y las unidades léxico-gramaticales que las realizan:

Tabla 16 – Realización congruente de secuencia: complejo clausular

semántica-discursiva	secuencia		
	conexión causal	figura causa	figura efecto posicionada
	COMO	x es impar	sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$
léxico-gramática	conector	cláusula	complejo clausular
	complejo clausular		

Fuente: elaboración propia

Teniendo en cuenta la perspectiva trinocular propuesta, esta secuencia puede abordarse 'por alrededor', desde la metafunción textual. Desde este punto de vista, en esta secuencia, la figura causa es realizada por una cláusula hipotáctica que precede a la cláusula independiente, por lo que se considera Tema marcado, de manera similar a las Circunstancias (Moyano, 2021, p. 497; Martin, Quiroz & Wang, 2023, p. 344). El análisis de la distribución de Tema y Nuevo en las cláusulas que realizan la secuencia se presenta en la Tabla 17.

Tabla 17 – Análisis de Tema en cláusulas realizando secuencia 1

Tema textual	Tema tópico marcado	Tema tópico no marcado	Proceso	Nuevo
	COMO x es impar	(nosotros)	sabemos	
que		(x)	puede escribirse	como $x = 2n+1$

Fuente: elaboración propia

El análisis temático muestra cómo la figura causa, realizada por una cláusula hipotáctica en posición inicial, funciona textualmente como un Tema marcado, dejando como Tema de la cláusula principal a un participante concordante '(nosotros)' que aparece de manera implícita y es recuperado por la flexión verbal del proceso de la cláusula mental. Esta cláusula mental proyecta una segunda cláusula, cuyo Tema es '(x)', también recuperado textualmente, que corresponde a la variable matemática relevante en esta secuencia. El hecho de que la figura causa aparezca como Tema tópico marcado permite, en este caso, posicionarla como información que se asume conocida, debido a que ha sido presentada previamente, y dar relevancia informativa al Nuevo, que es la forma "nueva" de escribir x como $2n + 1$. Desde el punto de vista de la estructura esquemática del género, el posicionamiento del Tema tópico marcado 'Como x es impar' permite identificar el cambio de etapa: del Punto de la demostración al Razonamiento matemático

Otra manera de organizar la información de la secuencia (1) no tendría los mismos efectos textuales señalados. Por ejemplo, puede proponerse una forma agnada de realizar este significado ideacional, en la que se altera el orden de las cláusulas que realizan las figuras, de modo que la figura causa aparece pospuesta a la figura efecto, usando un conector:

(i) Sabemos que *x* puede escribirse como x=2n+1

YA QUE (ii) *x* es impar

Para mantener el tipo de conexión causal en el agnado, se emplea un conector cuyo significado permite introducir la figura causa (en vez de la figura efecto) como si fuera información nueva. En este caso, se opta por el conector 'ya que', pero otras alternativas podrían ser 'pues', 'puesto que', 'porque', etc. En este sentido, la propuesta del agnado supone mantener el tipo de significado que vincula dos figuras en una secuencia, para lo cual puede seleccionarse cualquier opción de conector adecuada para el significado en juego. El análisis de Tema y Nuevo en el agnado se presenta en la Tabla 17.1.

Tabla 17.1 – Análisis de Tema en cláusulas realizando agnado (1.1)

Tema textual	Tema tópico marcado	Tema tópico	Proceso	Nuevo
		(nosotros)	sabemos que	
		(*x*)	puede escribirse	como $x = 2n+1$
YA QUE		x	es	impar

Fuente: elaboración propia

Desde la mirada 'por alrededor', cada una de estas secuencias tiene una distribución de la información diferentes, lo que puede tener consecuencias a nivel del texto y, por lo tanto, de la lógica de la demostración. En el caso de la secuencia agnada (1.1), la cláusula *x es impar* es introducida como si fuera información nueva, lo que reorganiza la manera en que se despliega la información en este texto. En este sentido, las opciones de realización de la CONEXIÓN tienen un impacto en la forma en la que los pulsos de información van construyendo a lo largo del texto la lógica de la demostración.

Además de realizaciones congruentes, los datos analizados permiten identificar dos patrones de realización **incongruente o metafórica** de la conexión, cada uno asociado a un recurso lingüístico particular: por una parte, el uso de preposición, y por otra, el uso de grupo verbal.

4.2.2.1 Conexión incongruente a través de preposición

Un primer recurso para la realización incongruente de la conexión corresponde a la preposición 'por'. En estos casos, la secuencia es realizada por una sola cláusula, en la que pueden observarse diferentes configuraciones estructurales. Algunos ejemplos de esta realización incongruente de la conexión por preposición se presentan a continuación en (3) y (4).

(3) (i) $a \cdot (-b)$ es positivo

POR (ii) ser producto de números positivos

(4) POR (i) definición de número negativo,

(ii) $-b$ es positivo

En (3) se observa una secuencia compuesta por dos figuras de estado. La secuencia es realizada, en el estrato léxico-gramatical, por una cláusula que incluye el Proceso relacional 'es', como se muestra en la a continuación.

Tabla 18 – Estructura clausular de secuencia realizada de manera incongruente

léxico-gramática	a · (–b)	es	positivo	POR [[ser producto de números positivos]]
	Participante	Proceso	Participante	Circunstancia
	cláusula			

Fuente: elaboración propia

Desde el punto de vista léxico-gramatical, la Circunstancia de la cláusula está constituida por la preposición 'por' y la cláusula incrustada '[[ser producto de números positivos]]'. Mirado 'por arriba', desde el estrato semántico-discursivo, la Circunstancia realiza una figura, que establece una conexión con la figura anterior mediante la preposición 'por'. Esta preposición funciona como conexión causal, estableciendo a la primera figura como una consecuencia y a la segunda como su causa. Esta relación lógica entre las dos figuras se presenta en la Tabla 19.

Tabla 19 – Realización metafórica de secuencia: cláusula

semántica-discursiva	**secuencia**				
	figura efecto			**conexión causal**	**figura causa**
	a · (–*b*)	es	positivo	POR	ser producto de números positivos
léxico-gramática	participante	proceso	participante	circunstancia	
	cláusula				

Fuente: elaboración propia

La Tabla 19 permite apreciar la tensión inter-estratal que se produce entre las unidades léxico-gramaticales y semántico-discursivas en (3): una secuencia, que congruentemente se realizaría en un complejo clausular se realiza en este caso dentro de una cláusula. La Tabla 1.1 presenta el agnado congruente de la secuencia (3). En este agnado ambas figuras son realizadas por cláusulas en rango:

Tabla 19.1 – Realización congruente de secuencia: complejo clausular (forma agnada)

semántica-discursiva	secuencia		
	figura efecto	conexión causal	figura causa
	$a \cdot (-b)$ es positivo	YA QUE	es producto de números positivos
léxico-gramática	cláusula	conector	cláusula
	complejo clausular		

Fuente: elaboración propia

En la forma agnada mostrada en la Tabla 19.1, la cláusula incrustada que funcionaba como parte de la Circunstancia en (3) ('ser producto de números positivos') es realizada como la cláusula en rango 'es producto de números positivos' y la conexión pasa de realizarse a través de la preposición 'POR' a ser realizada por el conector 'YA QUE'.

4.2.2.2 Conexión incongruente a través de grupo verbal

En las demostraciones matemáticas analizadas, otro recurso relevante para la realización incongruente o metafórica de la conexión corresponde al grupo verbal. En los ejemplos (5) y (6), se presentan dos casos en los que la conexión de las secuencias se realiza mediante el Proceso 'implica':

(5) (i) que y sea impar

IMPLICA (ii) que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m

(6) (i) Esto

IMPLICA (ii) que $a - (-b)$ es positivo

Si observamos en detalle la secuencia (5), podemos ver que las dos figuras conectadas por 'implica' son encapsuladas en el rango del grupo a través de cláusulas incrustadas: 'que y sea impar' y 'que puede escribirse como y=2m+1'. La conexión es realizada a través del grupo verbal 'IMPLICA', descrito como causal en otros discursos, como el de la historia (Leiva, 2022). En este caso, al igual que el descrito en (3), la secuencia semántico-discursiva es realizada léxico-gramaticalmente por medio de una sola cláusula, lo que supone una tensión inter-estratal. Esta realización incongruente de la secuencia se representa a continuación.

Tabla 20 –. Realización metafórica de secuencia: cláusula

secuencia		
figura causa	conexión causal	figura efecto
[[que y sea impar]]	IMPLICA	[[que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m]]
cláusula		
Participante grupo nominal	Proceso grupo verbal	Participante grupo nominal

Fuente: elaboración propia

La secuencia (5) puede desempaquetarse como un agnado congruente. En esta realización alternativa ambas figuras son realizadas no como cláusulas incrustadas sino como cláusulas en rango, y la conexión no como un grupo verbal sino como un conector, en este caso, 'entonces'. El agnado congruente de la secuencia (5) se muestra a continuación, en la Tabla 20.1.

Tabla 20.1. Realización congruente de secuencia: complejo clausular (agnado)

secuencia		
figura causa	conexión causal	figura efecto
y es impar	ENTONCES	puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m
complejo clausular		

Fuente: elaboración propia

Al observar en detalle la secuencia (6) antes introducida, vemos que solo una de las figuras conectadas por 'IMPLICA' es encapsulada en el rango del grupo a través de una cláusula incrustada ('que $a{\cdot}(-b)$ es positivo'), mientras que la otra es encapsulada a través de una referencia textual anafórica ('Esto').

La secuencia (6) también puede desempaquetarse como un complejo clausular. La realización alternativa hace la secuencia explícita, al realizar ambas figuras como cláusulas (explicitando la figura referida por el ítem textual 'Esto') y la conexión como la conjunción 'ENTONCES. La secuencia metáforica y su agnado congruente se muestran en la Tabla 21 y la Tabla 21.1 respectivamente a continuación:

Tabla 21 – Realización metafórica de secuencia: cláusula

secuencia		
figura causa	**conexión causal**	**figura efecto**
Esto	IMPLICA	[[que $a\cdot(-b)$ es positivo]]
Participante grupo nominal	Proceso grupo verbal	Participante grupo nominal
cláusula		

Fuente: elaboración propia

Tabla 21.1 – Realización congruente de secuencia: complejo clausular (agnado)

secuencia		
figura causa	**conexión causal**	**figura efecto**
$-b$ es positivo	ENTONCES	$a \cdot (-b)$ es positivo
cláusula	conector	cláusula
complejo clausular		

Fuente: elaboración propia

Preliminarmente, podemos plantear algunas diferencias entre la manera en que se despliega la conexión incongruente en las demostraciones matemáticas analizadas y las descripciones disponibles para otras disciplinas, en particular para el discurso de la historia. En las demostraciones analizadas, el empaquetamiento de las figuras en el rango del grupo no ocurre por medio de nominalización, sino por medio de una cláusula incrustada, como en (5), o mediante referencia textual, como en (6). Esto tiene como una consecuencia relevante que no hay en la demostración un potencial evaluativo como el que se abre con la nominalización (e.g. **el importante estatus de impar implica su inmediata escritura como...*). Esto está en línea con lo que O'Halloran (2015) y Doran (2018b) describen con respecto a la ausencia de componente interpersonal en el discurso matemático. En efecto, a nivel interpersonal, no se identifican en las demostraciones analizadas el uso de Procesos que gradúen la fuerza causal, como 'estimular', 'contribuir' o 'permitir' (cf. Leiva, 2022; Leiva & Oteíza, 2023).

A nivel textual, sin embargo, el uso de la metáfora lógica tal y como se despliega en el discurso matemático analizado parece traer ganancias. En este caso, la encapsulación de la primera figura en el rango del grupo posibilita la tematización de una figura previamente introducida, de una manera similar a la cláusula hipotáctica antepuesta en la secuencia (1). A continuación, se representa el análisis de la organización de la información en la secuencia (5) en contraste con su agnado congruente, en las Tablas 22 y 22.1 respectivamente:

Tabla 22 – Análisis de Tema y Nuevo de secuencia (metafórica)

Tema	Proceso	Nuevo
[[que *y* sea impar]]	IMPLICA	[[que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero *m*]]

Fuente: elaboración propia

Tabla 22.1 – Análisis de Tema y Nuevo de la secuencia agnada (congruente)

Tema textual	Tema	Proceso	Nuevo
	y	es	impar
ENTONCES	(y)	puede escribirse	como $y = 2m + 1$, para algún entero m

Fuente: elaboración propia

Tal como se observa en la secuencia y su agnado, las opciones de realización incongruente de la conexión permiten en el flujo textual posicionar cierta información como un punto de partida (Tema) y otra como información relevante (Nuevo). Esto tiene consecuencias respecto de la manera en que se despliega la lógica argumentativa propia del género demostración matemática.

4.2.3 Conexión externa versus conexión interna

En las demostraciones matemáticas analizadas es posible identificar conexiones que funcionan tanto en el plano externo como en el plano interno. En los ejemplos (1-4) ya introducidos, las conexiones corresponderían a conexiones externas, que existen 'fuera del texto', como conocimiento matemático aceptado como verdadero en el campo:

(1)	COMO	(i)	*x* es impar
		(ii)	sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$
(2)	SI	(i)	tanto *a* como *b* son negativos,
	ENTONCES	(ii)	$(-a) \cdot (-b)$ es positivo
(3)		(i)	$a \cdot (-b)$ es positivo
	POR	(ii)	ser producto de números positivos
(4)	POR	(i)	definición de número negativo,
		(ii)	$-b$ es positivo

En estas secuencias, la conexión vincula solamente dos figuras para formar una secuencia. Dado que la conexión en todos estos casos es de tipo causal, una de las figuras se identifica como causa ('ser producto de números positivos') y la otra figura se identifica como efecto ('$a \cdot (-b)$ es positivo'). Esta conexión causal entre las proposiciones se entiende como experiencial, en tanto existe “fuera del texto”, al ser parte del conocimiento matemático. El hecho de que se trate de conocimiento matemático del campo permite agregar a la figura efecto en las secuencias (2-4) arriba una posición (‘sabemos que’), que contribuye a señalar de manera explícita a esta figura como una premisa sabida y compartida a partir del conocimiento del campo, tal como aparece en la secuencia (1). La posición permite de esta forma corroborar la naturaleza externa de la conexión en juego en cada secuencia, tal como se muestra a continuación:

figura causa	conexión causal	figura efecto posicionada
SI tanto *a* como *b* son negativos	ENTONCES	**sabemos que** $(-a) \cdot (-b)$ es positivo
figura efecto posicionada	**conexión causal**	**figura causa**
Sabemos que $a \cdot (-b)$ es positivo	POR	ser producto de números positivos.
conexión causal	**figura causa**	**figura efecto posicionada**
POR	definición de número negativo	**sabemos que** $-b$ es positivo

Por otro lado, también es posible identificar en el discurso matemático conexiones de naturaleza interna, tal y como se ha destacado en la literatura previa (O’Halloran, 2005). Estas conexiones funcionan retóricamente para organizar el razonamiento y el despliegue de la información en el texto. Un primer patrón relevante de conexión interna en las demostraciones analizadas es que esta conecta fragmentos más extensos de texto que la conexión externa, que pueden corresponder a dos secuencias o a una figura y una secuencia entre sí. En (7), de la demostración D1, se muestra un ejemplo de conexión interna entre dos secuencias, mediante el conector ‘EN FORMA SIMILAR’:

(7)	COMO	(i) x es impar (ii) sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$, para algún entero n.	secuencia (I)
	EN FORMA SIMILAR,		
	IMPLICA	(iii) que y sea impar (iv) que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m	secuencia (II)

El ejemplo (7) presenta una comparación entre dos secuencias causales externas, que son parte de las proposiciones conocidas por conocimiento matemático –correspondientes a las secuencias (1) y (5) previamente introducidas. La similitud es aquí retóricamente establecida entre dos razonamientos que se presentan como ejemplos de un mismo principio matemático. En este caso, el conector que relaciona las dos secuencias es de significado comparativo de similitud, según la categorización propuesta por Martin (1992). Una particularidad de las conexiones comparativas internas es que permiten la intercambiabilidad del orden de las unidades que vinculan, es decir, una reorganización del flujo de la información desde el punto de vista textual. De esta manera, es posible modificar la forma en que se organiza la información en este complejo, intercambiando el orden de las secuencias. Esto permite construir un significado agnado de la secuencia original. Estas secuencias, la original y su agnado, se muestran en las tablas a continuación:

Tabla 23 – Complejo de secuencias con conexión interna

secuencia con conexión causal	conexión interna comparativa	secuencia con conexión causal
COMO x es impar, sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$, para algún entero n.	EN FORMA SIMILAR	que y sea impar IMPLICA que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m

Fuente: elaboración propia

Tabla 23.1 – Complejo de secuencias con conexión interna: reorganización textual

secuencia con conexión causal	conexión interna comparativa	secuencia con conexión causal
Que y sea impar IMPLICA que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m	EN FORMA SIMILAR	COMO x es impar, sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$, para algún entero n.

Fuente: elaboración propia

En los ejemplos señalados, la conexión interna funciona para relacionar secuencias simples, en las que se relacionan solamente dos figuras por una relación de conexión externa. Sin embargo, a medida que aumenta la complejidad ideacional de la etapa Razonamiento matemático, es posible observar en estas secuencias un anidamiento de conexión, es decir, la conformación de secuencias dentro de secuencias. Este patrón puede ser interpretado en términos de complejos de secuencias. En los complejos de secuencias es posible identificar dos o más relaciones de conexión externa, realizada explícita o implícitamente. La realización implícita de la conexión ha sido señalada como un rasgo del discurso matemático por otros autores en el ámbito de la LSF (O'Halloran, 2005, p. 119; Schleppegrell, 2007, p. 139).

Las secuencias que constituyen un complejo con otra secuencia pueden realizarse tanto mediante lenguaje natural como a través de lenguaje matemático. Un ejemplo de este patrón se presenta en la secuencia (8) a continuación, que conecta internamente los complejos de secuencia (I) y (II).

(8)	SI	(i)	tanto a como b son negativos	complejo de secuencia (I)
	ENTONCES	(ii)	$(-a)\cdot(-b)$ es positivo	
	POR	(iii)	ser producto de números positivos	
	POR OTRO LADO			
		(i)	$(-a)\cdot(-b) = ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)$	complejo de secuencia (II)
	(ENTONCES)	(ii)	$= ((-1)\cdot(-1)\cdot(-1))\cdot(a\cdot b)$	
	(ENTONCES)	(iii)	$= 1\cdot(ab)$	
	(ENTONCES)	(iv)	$= ab$	

En el ejemplo (8), el complejo de secuencias (I) presenta un conjunto de premisas matemáticas que explican de manera condensada a través de lenguaje natural el cambio de polaridad en el producto de dos números negativos. En este complejo se observa un ejemplo de anidación de secuencias: las figuras (ii) y (iii) forman una secuencia causal mediante la conexión 'POR', y esa secuencia se conecta con la figura (i) en una relación consecuencial de condición mediante las conexiones 'SI… ENTONCES' para formar el complejo de secuencia (I). Estas relaciones de anidamiento se representan en 8 con el uso de diferentes sangrías. La conexión interna 'POR OTRO LADO'[7] introduce el complejo de secuencia (II), que despliega el principio matemático presentado en el complejo (I) a través de lenguaje simbólico, para demostrar de forma explícita y paso por paso por qué el producto de dos números negativos es positivo. En el complejo de secuencia (II), cada una de las ecuaciones o igualdades que se presenta es interpretada lingüísticamente como una figura de estado, ya que, desde el punto de vista del lenguaje natural, pueden ser leídas como cláusulas relacionales del tipo 'menos *a* por menos *b* **es** igual a menos 1 por *a*, por menos uno por *b*' (O'Halloran, 2005). La disposición de las ecuaciones en una línea hacia abajo se entiende aquí como conexión causal implícita expresada mediante un conector causal entre paréntesis: (ENTONCES).

En los ejemplos presentados hasta este punto, la conexión interna se realiza mediante conectores. Sin embargo, al igual que las conexiones externas, las conexiones internas también pueden ser realizadas por grupos verbales en las demostraciones matemáticas estudiadas. Un ejemplo de esto se presenta en la secuencia (9), a continuación.

(9)	COMO	(i)	x es impar	secuencia (I)
	ENTONCES	(ii)	sabemos que puede escribirse como $x = 2n + 1$, para algún entero n.	
EN FORMA SIMILAR				
		(i)	que y sea impar	secuencia (II)
	IMPLICA	(ii)	que puede escribirse como $y = 2m + 1$, para algún entero m	
	SE SIGUE QUE	(iii)	$xy = (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$.	secuencia (III)
	CONCLUIMOS QUE	(iv)	xy puede escribirse como $xy = 2k + 1$, para un cierto entero k, a saber, $k=2nm+n+m$.	secuencia (IV)

7 Si bien el significado de 'POR OTRO LADO' corresponde regularmente a un significado comparativo de similitud (Martin & Rose, 2007), en este caso la relación de significado que se establece es de carácter más bien elaborativo, tal como queda demostrado por el complejo de secuencias II.

El ejemplo (9) presenta algunas de las opciones que se identifican en las demostraciones para realizar la conexión interna mediante grupo verbal. En este caso, aparecen los procesos 'SE SIGUE' y 'CONCLUIMOS' para establecer este tipo de relaciones. Estas conexiones funcionan para organizar el argumento, mostrando las deducciones lógicas establecidas retóricamente por el escritor de la demostración. Su contribución retórica puede verse en relación con el género: estas conexiones internas indican el cierre de una etapa y el inicio de otra: 'SE SIGUE' permite concluir la etapa de Razonamiento matemático y 'CONCLUIMOS que' señala la etapa Confirmación, que completa la estructura esquemática del género. Nuevamente, las unidades vinculadas por estas conexiones internas son mayores a las unidades vinculadas típicamente por las conexiones externas (i.e. cláusulas); en este caso, los límites de la unidad que cumple la función efecto no es identificable de manera categórica, es decir, no se puede señalar con certeza su alcance exacto en el flujo del texto. Otro rasgo de las conexiones causales internas identificadas en las demostraciones es que son realizadas por Procesos de tipo mental y pueden ser atribuibles al hablante que produce el texto, lo que hace más evidente el rol retórico que cumplen.

El análisis de las demostraciones matemáticas exploradas ha permitido identificar las diferentes opciones de CONEXIÓN que se despliegan en este género, así como la manera en que este significado lógico se relaciona con la estructura esquemática del género que se instancia en la demostración. La perspectiva trinocular asumida ha permitido describir estos patrones de CONEXIÓN teniendo en cuenta su interacción con opciones textuales ('por alrededor'), sus diferentes realizaciones léxico-gramaticales ('por abajo') y su despliegue en relación con la estructura esquemática del género ('por arriba'). Las características de las opciones de CONEXIÓN a partir de esta mirada trinocular se sintetizan en la Tabla 24.

Tabla 24 – Patrones de CONEXIÓN desde una mirada trinocular: síntesis

Tipo de conexión	Plano de conexión	Unidades semántico-discursiva conectadas	Realización léxico-gramatical ('por abajo')	Potencial de organización textual ('por alrededor')	Vínculo con género ('por arriba')
Causal	Externa	Figuras	Congruente: mediante conectores Incongruente: mediante grupo verbal y preposición	Organización textual modificable con cambio de conector para mantener sentido de relación causa-efecto	Establece relaciones en las etapas Punto de la demostración y Razonamiento matemático
Causal	Interna	Secuencias o complejos de secuencias	Congruente: mediante conectores y grupo verbal	Organización textual no modificable	Señala límites de las etapas Razonamiento matemático y Confirmación
Comparativa	Interna	Secuencias	Congruente: mediante conectores	Organización textual modificable sin cambio de conector	Elabora relaciones para el despliegue de la etapa Razonamiento matemático

Fuente: elaboración propia

5 Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue ofrecer una descripción inicial de la demostración como género discusivo y mostrar los patrones de CONEXIÓN que son relevantes en este, desde la perspectiva teórica de la LSF. Este estudio propone una exploración a un campo disciplinar y a un género específico que desde la investigación lingüística en español ha sido en general escasamente explorado. Basándose en las descripciones sistémico-funcionales previas del discurso matemático, este estudio busca comprender cómo funciona el lenguaje natural que acompaña al simbolismo matemático en uno de los géneros más importantes en la formación de matemáticas y matemáticos como parte de su progresiva especialización en la disciplina. Esta descripción se ha propuesto desde una perspectiva teórica y metodológica de naturaleza funcional, que permite abordar el estudio de la CONEXIÓN en relación con otras opciones de significado. En el marco de la teoría sistémica, esta aproximación se ha entendido como una mirada trinocular, que involucra observar los significados desde diferentes estratos y sistemas complementarios.

En consideración de la perspectiva trinocular, el punto de partida para esta exploración ha sido la descripción de la demostración matemática como un género discursivo. Esta descripción ha considerado los recursos textuales e ideacionales que permiten identificar patrones o síndromes de significado asociados a las diferentes etapas que se despliegan en el texto para cumplir su propósito social. Los datos explorados permiten proponer una descripción inicial de la estructura esquemática de tres etapas: Punto de la demostración ^ Razonamiento matemático ^ Confirmación. La definición de esta estructura esquemática complementa, desde una mirada profunda a los patrones de lenguaje, las descripciones de este género propuestas desde el ámbito de la enseñanza de las ciencias. El aporte de este estudio radica, en este sentido, en ofrecer criterios lingüísticos específicos y explícitos para comprender cómo se organiza una demostración matemática desde el punto de vista semiótico.

El interés por una exploración lingüística de la CONEXIÓN en este género ha sido motivado por la gran relevancia que se otorga en la literatura a las relaciones lógicas en la demostración (Alvarado & González, 2009; Camacho *et al*, 2014; O'Halloran, 2005; Schleppegrell, 2007; Spanos *et al*, 1988). El análisis lingüístico confirma que las conexiones constituyen un recurso crucial para dar sentido a la relación entre proposiciones y expresiones matemáticas, así como para explicitar el proceso deductivo en todas las etapas de la demostración. El análisis ha permitido identificar conexiones causales y comparativas, realizaciones congruentes e incongruentes, así como conexiones en el plano externo e interno; específicamente, conexiones causales externas, causales internas y comparativas internas, con formas de realización variadas. Estas incluyen conectores o frases conectivas, preposiciones y grupos verbales. Los patrones identificados en este estudio son consistentes con algunos de las características propuestas por O'Halloran (2005) para el significado lógico en el discurso matemático, como la presencia de relaciones lógicas de tipo condicional y causal, y de relaciones cohesivas, es decir, conexiones internas. Un patrón interesante en los datos es que la conexión interna es siempre congruente, incluso cuando se realiza mediante grupo verbal (e.g. 'SE SIGUE QUE'), ya que no condensa la realización de una secuencia al rango de la cláusula. Las opciones en el plano externo, en cambio, sí son en ocasiones realizadas de manera incongruente (e.g. 'POR' e 'IMPLICA' en ejemplos 3-6), es decir, pueden funcionar para condensar una secuencia en el rango de la cláusula.

Desde una mirada 'por alrededor', la interacción de las opciones de CONEXIÓN con recursos de la metafunción textual permite identificar algunas implicancias importantes de optar por ciertos recursos por sobre otros. Respecto de las opciones de conexión causal congruente, se observa que, en el plano externo, un cambio en el flujo informativo afecta el orden de la relación causa-efecto entre las figuras y puede tener implicaciones respecto de qué información se presupone como punto de partida. En el caso de la conexión causal en el plano interno, se observa la imposibilidad de reorganizar el flujo textual sin que se afecte la lógica de su despliegue, mientras que en el caso de la conexión comparativa en el plano interno es posible intercambiar el orden de las figuras sin alterar el sentido de la secuencia.

Otro aspecto interesante desde la mirada 'por alrededor' involucra los significados interpersonales en el estrato semántico-discursivo. Tal como señalan algunos autores en el ámbito de la LSF, el componente interpersonal pareciera ser irrelevante en el discurso matemático (Doran, 2018b; O'Halloran, 2005). Esto se observa en patrones de CONEXIÓN en la demostración, en particular respecto de la realización incongruente de la conexión externa. En los datos analizados, el uso de grupos verbales como recurso para la CONEXIÓN no cumple un rol en la gradación de la fuerza causal (e.g. 'CAUSAR' VS. 'PERMITIR'), como sí ha sido descrito en el discurso de otras disciplinas, como la historia (Coffin, 2004; Leiva & Oteíza, 2023). Sin embargo, en los datos se observan otros patrones interpersonales, como el uso de posiciones (e.g. 'sabemos que'), que parecen sugerir algún rol de los significados interpersonales. Este es un aspecto que requiere mayor exploración desde una perspectiva lingüística.

En este artículo, el estudio de la demostración matemática se ha focalizado en demostraciones elaboradas en el contexto de educación terciaria, cuestión que amplía la naturaleza de los datos estudiados hasta ahora en las investigaciones en el marco sistémico-funcional. Una característica relevante de estas demostraciones es que han sido elaboradas por docentes universitarios de matemáticas con una finalidad pedagógica. Se trata de textos que buscan presentarse como buenos modelos de la manera en que se espera que los estudiantes elaboren el razonamiento matemático y desplieguen los recursos semióticos para construir la demostración como un texto cohesivo. De esta manera, los datos estudiados aquí pueden considerarse como modelos prototípicos de demostración, para un cierto nivel de formación y un cierto nivel de complejidad disciplinar. En este sentido, la exploración de la demostración matemática que aquí se presenta tiene un gran potencial de expansión, para considerar diferentes momentos formativos de los estudiantes y diferentes contextos en los que los especialistas producen demostraciones para crear conocimiento nuevo.

Este trabajo, basado en un corpus acotado de demostraciones, busca ser un punto de partida para desarrollar descripciones teóricamente fundadas de géneros del ámbito de las matemáticas. Un aspecto clave que ha permitido llevar a cabo esta exploración lingüística ha sido el trabajo interdisciplinario con docentes de matemáticas, no solo para acceder a los datos analizados sino sobre todo para entender, desde una mirada especializada en el campo de las matemáticas, qué es la demostración y cómo se espera que funcione en el contexto de la disciplina. Esta colaboración se ha orientado, especialmente, a elaborar una mirada lingüística sobre la demostración que pueda tener aplicaciones pedagógicas para su enseñanza, teniendo como fundamento el principio de aplicabilidad propuesto por la lingüística sistémico funcional.

Agradecimientos

A los docentes de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica Mahsa Allahbakhshi, Ricardo Menares, Duvan Henao y Antonio Behn, por el fructífero trabajo en torno a las demostraciones matemáticas que sostuvieron con una de las autoras. Esta colaboración interdisciplinaria fue, en definitiva, la motivación original de este estudio.

Declaración de autoría

Declaramos que la escritura del artículo fue realizada por las dos autoras en conjunto. En términos del análisis, el de género fue liderado por la autora Margarita Vidal Lizama, mientras que el de CONEXIÓN fue liderado por la autora Natalia Leiva Salum.

Referencias

ACCURSO, K.; GEBHARD, M.; PURINGTON, S.B. Analyzing Diverse Learners' Writing in Mathematics: Systemic Functional Linguistics in Secondary Pre-Service Teacher Education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, v. 18, n. 1, p. 84-108, 2017. DOI: https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i1.48

ADAMS, T. L. Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, v. 56, n.8, p. 786–795, 2003. DOI: http://www.jstor.org/stable/20205297.

ALFARO-CARVAJAL, C., FLORES-MARTINEZ, P.;VALVERDE-SOTO, G. La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, [online], v. 33, n. 2, p. 55-75, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.33-2.5.

ALLAHBAKHSHI, M., BEHN, A., HENAO, D. LEIVA, N.; MENARES, R. *Orientaciones para la construcción y la escritura de una demostración.* Proyecto Ciencia 2030. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2022

ALVARADO, A. & GONZÁLEZ, M.T. La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: un estudio de caso. *Enseñanza de las ciencias*, v. 28, n. 1, p. 73-84, 2009.

BUSTOS, A; ZUBIETA, G. Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las ciencias*, v. 37, n. 3, p. 129-148, 2019. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506

CAMACHO, V., SÁNCHEZ, J.J. & ZUBIETA, G. Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las ciencias*, v. 32, n. 1, p. 117-138, 2014. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.983

CHRISTIE, F. & DEREWIANKA, B. *School discourse: Learning to Write Across the Years of Schooling.* New York: Continuum Discourse, 2008.

COCKING, R. R. & MESTRE, J. P. *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*. Taylor & Francis Group, 1988

COFFIN, C. Learning to write history. The role of causality. *Written Communication*, v. 21, n. 3, p. 261-289, 2004. DOI: https://doi.org/10.1177/0741088304265476

DORAN, Y. J. *The Discourse of Physics: Building Knowledge through Language, Mathematics and Image,* London: Routledge, 2018a.

DORAN, Y. J. Intrinsic Functionality of Mathematics, Metafunctions in Systemic Functional Semiotics, *Semiotica*, v. 225, p. 457–87, 2018b. DOI: https://doi.org/10.1515/sem-2017-0004

DORAN, Y. J. Academic Formalisms: Toward a Semiotic Typology. *In:* MARTIN, J.R.; DORAN, Y.; FIGUEREDO, G. (eds). *Systemic Functional Language Description:* Making Meaning Matter. London: Routledge, 2020. p. 331–358.

DORAN, Y. J. Semiotic Description: Grappling with Mathematics. *In:* CALDWELL, J., KNOX, J., & MARTIN, J. R. (eds.). *Appliable linguistics and social semiotics.* Bloomsbury Academic, 2022. p. 341-354.

DORAN, Y. J. & MARTIN, J.R. Field relations: Understanding scientific explanations. *In*: K. MATON, K.; MARTIN, J.R.; DORAN, Y. J. (eds). *Studying Science:* Knowledge, Language, Pedagogy. London: Routledge, 2021.

EGGINS, S. *An Introduction to Systemic Functional Linguistics*. Londres: Bloomsbury, 2004.

FIALLO, J., CAMARGO, L. & GUTIERREZ, A. Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración. Escuela de Matemáticas*, v. 31, n. 2, p. 181-205, 2013.

HALLIDAY, M.A.K. *An Introduction to Functional Grammar,* 2 ed. Londres: Edward Arnold, 1994

HALLIDAY, M.A.K. & MARTIN, J. R. *Writing science: Literacy and discursive power.* Londres: The Falmer Press, 1993.

HALLIDAY, M.A.K. & C.M.I.M. MATTHIESSEN. *Halliday's Introduction to Functional Grammar.* 4. ed. Nueva York: Routledge, 2014.

HALLIDAY, M. A. K. & HASAN, R. *Cohesion in English*. London: Longman, 1976.

HAO, J. *Analysing Scientific Discourse: A framework for exploring knowledge building in biology from a systemic functional linguistic perspective.* New York: Routledge, 2020.

HEYVAERT, L. Nominalization as Grammatical Metaphor: On the Need for a Radically Systemic and Metafunctional Approach. In: SIMON-VANDENBERGEN, A. M.; TAVERNIERS, M.; RAVELLI, L. (eds). *Grammatical Metaphor:* Views from Systemic Functional Linguistics, Ámsterdam, Filadelfia: John Benjamins, 2003. p. 65-99.

KATZ, B.P., THOREN, E. & HERNÁNDEZ, V. Why Should that Convince Me?: Teaching Toulmin Analysis Across the Curriculum. *PRIMUS*, v. 33, n. 2, p. 285-313, 2023. DOI: https://doi.org/10.1080/10511970.2022.2068093

LEIVA, N. Conexiones causales en español: un recurso semántico-discursivo para explicar el pasado reciente en la Historia escolar. *Estudios Filológicos*, n.69, p.135-161, 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.4067/S0071-17132022000100135

LEIVA, N. & OTEÍZA, T. Causalidad y posicionamientos en el discurso de la historia escolar en español. Íkala, Revista de Lenguaje y Cultura, v. 28, n.3, p.1-19, 2023. DOI: https://doi.org/10.17533/udea.ikala.352539.

LEW, K. & MEJÍA-RAMOS, J. P. Linguistic conventions of mathematical proof writing across pedagogical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 103, n. 1, p. 43-62, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-019-09915-5

MARTIN, J.R. *English text: system and structure*. Amsterdam: Benjamins, 1992

MARTIN, J.R. Life as a noun: Arresting the universe in science and humanities. In: HALLIDAY, M. A. K.; MARTIN, J. R. (eds). *Writing science:* Literacy and discursive power. London: The Falmer Press, 1993. p. 242–293.

MARTIN, J.R. Making History: Grammar for interpretation. In: MARTIN, J. R.; WODAK, R. (eds.). *Re/reading the past:* Critical and functional perspectives on time and value. Amsterdam: Benjamins, 2004, p. 20–56.

MARTIN, J.R. *Genre and Field:* Social Processes And Knowledge Structures in Systemic Functional Semiotics. The 33rd International Systemic Functional Congress, 2006, *Proceedings*...

MARTIN, J.R. *Ideational semiosis: a tri-stratal perspective on grammatical metaphor*. D.E.L.T.A., São Paulo, v. 26, n.2, p. 1-27, 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1678-460X2020360304.

MARTIN, J.R. & WHITE, P.R.R. *The Language of Evaluation*. Londres: Palgrave, 2005.

MARTIN, J.R. & ROSE, D. *Working With Discourse. Meaning Beyond the Clause.* London: Continuum, 2007.

MARTIN, J.R. & ROSE, D. *Genre Relations. Mapping Culture*. London: Equinox Publishing, 2008.

MARTIN, J. R., QUIROZ, B. & WANG, P. Theme. In: *Systemic Functional Grammar:* A text-based description of English, Spanish and Chinese. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. p. 304-369.

MARTÍNEZ, A. *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2001.

MARTÍNEZ L. Algunas apreciaciones acerca del concepto crítico de demostración. *Logos. Anales del Seminario de Metafísica*, vol. 55, n. 1, p. 109-124, 2022. DOI: https://doi.org/10.5209/asem.76153

MOYANO, E.I. El sistema de Tema en español: una mirada discursiva sobre una cuestión controversial. In: GHIO, E; FERNÁNDEZ, M.D. (eds.).*El discurso en español y portugués:* Estudios desde una perspectiva sistémico-funcional, Santa fe, Universidad Nacional del Litoral, 2010, p. 39-87

MOYANO, E.I. La función de Tema en español: sus medios de realización desde la perspectiva trinocular de la Lingüística Sistémico Funcional. *Revista Signos*, v. 54, n. 106, p. 487-517, 2021.DOI: 10.4067/S0718-09342021000200487.

O'HALLORAN, K. Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts'. *Semiotica*, v. 124, n.1/2, p. 1-29, 1999. DOI: https://doi.org/10.1515/semi.1999.124.1-2.1

O'HALLORAN, K. *Mathematical discourse. Language, symbolism and visual images.* London: Continuum, 2005.

O'HALLORAN, K. The language of learning mathematics: A multimodal perpective. *Journal of Mathematical Behavior,* v.40, p. 63–74, 2015. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.002

PIMM, D. *Speaking mathematically:* Communication in mathematics classrooms. London: Routledge, 1987.

QUIROZ, B. & MARTIN, J. R. Perfil sistémico-funcional del grupo nominal en español: estructura, funciones discursivas básicas y organización sistémica. *Estudios Filológicos*, v. 68, p. 123–151, 2021. DOI: https://doi.org/10.4067/s0071-17132021000200123

SCHLEPPEGRELL, M. J. The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, v. 23, n. 2, p. 139–159, 2007. DOI: https://doi.org/10.1080/10573560601158461

SEGERBY, C. *Supporting mathematical reasoning through reading and writing in mathematics: making the implicit explicit.* Holmbergs, Malmö University, 2017.

SPANOS, G., RHODES, N., DALE, T. & CRANDALL, J. Linguistics Features of mathematical Problem Solving. In: COCKING, R. R.; MESTRE, J. P. (eds.). *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*. Taylor & Francis Group, 1988. p. 221–240.

SUA FLORES, C. Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica. *Tecne, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional*, n. 45, p. 121-142, 2019. DOI: https://doi.org/10.17227/ted.num45-9838

SUNDSTROM, T. *Mathematical Reasoning:* Writing and Proof. Pearson Education, 2021.

URHAN, S. & ZENGIN, Y. Investigating University Students' Argumentations and Proofs Using Dynamic Mathematics Software in Collaborative Learning, Debate, and Self-reflection Stages. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, v.10, n.2, p. 380–407, 2024. DOI: https://doi.org/10.1007/s40753-022-00207-7

WILSON, J. A Primer on Mathematical Proof. https://dept.math.lsa.umich.edu/~jchw/2015Math110Material/PrimerOnProof-Math110.pdf s/a